أولاً

الجبر

الوحدة الأولى : المصفوفات

درس ١ مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• **تعريف المصفوفة** : هى صورة لتنظيم المعلومات على هيئة صفوف وأعمدة توضع بين قوسين ( )

• إذا كان عدد الصفوف يساوى (م) وعدد الأعمدة يساوى (ن) قيل إن المصفوفة من النظم (م × ن) فى دراستنا م ≥ ٣ ، ن ≥ ٣

• **بعض المصفوفات الخاصة** :

(١) **مصفوفة الصف** : هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة .

(٢) **مصفوفة العمود** : هى المصفوفة التى تتكون من أى عدد من الصفوف وعمود واحد فقط .

(٣) **المصفوفة المربعة** : هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة .

(٤) **المصفوفة الصفرية** : هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار . ويرمز لها بمستطيل ▭

• **مدور المصفوفة** : استبدال الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف بنفس الترتيب لمصفوفة أ على النظم (م × ن) نحصل على مصفوفة من النظم (ن × م) يسمى مدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز أ^{ت}

• **ملحوظة** : $(أ^{ت})^{ت} = أ$

• **المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة** : إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة وإذا وفقط إذا كانت أ = أ^{ت} ، وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت أ = -أ^{ت}

• **تساوى مصفوفتين** : يقال لمصفوفتين أنهما متساويتان إذا وفقط إذا كانت لهما نفس النظم (الأبعاد) والعناصر المتناظرة متساوية .

• فمثلاً : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ \sqrt{٢} & ٥ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ \sqrt{٢} & ٥ \end{pmatrix}$

• مثال (١) : أوجد قيمة كل من المتغيرين س ، ص إذا كان :

$$\begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٣+٢ص & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥+س \\ ٥- & ٥ \end{pmatrix}$$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة فى الأوضاع متساوية

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

∴ ٢ص + ٣ = −٥ ∴ ٢ص = −٨ ∴ ص = −٤

• مثال (٢) : أوجد مدور المصفوفة التالية : أ = (١ ٢ ٣) ∴ $أ^{م} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

• ملحوظة : أ مصفوفة صف على نظم ١ × ٣ ، $أ^{م}$ مصفوفة عمود على نظم ٣ × ١

ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$ ∴ $ب^{م} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨ & ٥ \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ ∴ $جـ^{م} = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ & ١ \\ ٨ & ٥ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

• ملحوظة : مدور المصفوفة الصفرية هى مصفوفة صفرية .

ء = $\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ = □ ، □ = $\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \\ . & . \end{pmatrix}$ = $ء^{م}$

تمرين (١) : على مفهوم المصفوفة ومدور وتساوى المصفوفة

• أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

١ $\begin{pmatrix} س & ع-١ \\ ص+١ & ك \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix}$

٢ $\begin{pmatrix} ٢س+١ & ٢ص \\ ٤ل+١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$

٣ $\begin{pmatrix} \frac{ل}{٢} & \frac{ع}{٣} \\ أ+ب & ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

٤ $\begin{pmatrix} أ+ب & س \\ ص & أ-ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٤ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}$

٥ $\begin{pmatrix} أ & ب \\ س+ص & س-ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$

٦ $\begin{pmatrix} أ+٢ب & س \\ س+ص & أ-ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

٧ $\begin{pmatrix} ٢ب & ٤ \\ ٤أ & ج \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢أ & ٨ \\ ج & ب \end{pmatrix}$

٨ $\begin{pmatrix} ٤ب & ٢ \\ ٦ & ٢أ+٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ+ب & ب \\ ٣ج & ب-أ \end{pmatrix}$

٩ $\begin{pmatrix} ٢أ+١ & ٣ب+أ \\ ٢ب+ج & ٢ج+٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٤ & ٣ \\ ١٨ & ٠ \end{pmatrix}$

١٠ $\begin{pmatrix} ٤٩ & ٤٥ \\ ٢٠ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ج & أ+٢ب \\ ٥ج+٤ & ٥ \end{pmatrix}$

• أوجد مدور المصفوفات التالية :

١١ أ = (٣ ٤ ٥)

١٢ ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$

١٣ جـ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٨ & ٥ \end{pmatrix}$

١٤ أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٩ & ٨ & ٥ \\ ١٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

١٥ أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

١٦ ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ & ٢س \\ ٩ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$

١٧ س = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -٩ & ٦ & -٥ \\ ٧ & ٩ & -١ \end{pmatrix}$

١٨ $أ^{م} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ

١٩ $س^{م} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ٨ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ أوجد س

٢٠ $ص_{س}^{م} = (١ \ ٢ \ ٦)$ أوجد $ص_{س}$

٢١ $أ^{م} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد أ

٢٢ $أ^{م} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ

٢٣ $س^{م} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد س

٢٤ $س_{س}^{م} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ -١ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ هل هى متماثلة أو شبه متماثلة ؟

• **إمكانية جمع مصفوفتين** أ، ب : الجمع ممكن إذا كان لهما نفس النظم.

• مثال (١) : إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ٦- & ١- \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب ، ب + أ

الحل

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٣+٤ & ٣+٣ \\ ٦-٦ & ١-٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٦ \\ صفر & ٤ \end{pmatrix}$

• **ملحوظة :** نفس النظم ٢ × ٢ ∴ عملية الجمع مغلقة

ب + أ = $\begin{pmatrix} ٣+٣ & ٤+٨ \\ ٥+١- & ٦+٦- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٤ & صفر \end{pmatrix}$

∵ أ + ب = ب + أ ∴ عملية الجمع إبدالية

• مثال (٢) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٤- \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & ٥- \end{pmatrix}$

أوجد : (١) أ + ب + جـ (٢) (أ + ب) + جـ (٣) أ + (ب + جـ)

الحل

(١) أ + ب + جـ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٤- \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & ٥- \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢+٦+١ & ٣+٢+٧ \\ ٥-٢+٦ & ٤-٤-٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٩ & ٥- \end{pmatrix}$

(٢) (أ + ب) + جـ = $\left[\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٤- \end{pmatrix}\right]$ + $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & ٥- \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ ٣ & صفر \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٦ & ٥- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}$

(٣) أ + (ب + جـ) = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ + $\left[\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & ٥- \end{pmatrix}\right]$

= $\begin{pmatrix} ٩ & ٧ \\ ٤ & ٩- \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}$

∴ أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ∴ عملية الجمع دامجة

• عملية ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة :

ناتج ضرب مصفوفة أ على نظم م × ن فى عدد حقيقى ك ≠ ٠ هو مصفوفة يضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة أ فى العدد الحقيقى ك

إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن ٢أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$ ، -أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٥- \\ ٦- & ٨- \end{pmatrix}$

أ + ☐ = ☐ + أ = أ يسمى ☐ المحايد الجمعى

حيث ☐ هى المصفوفة الصفرية

خاصية : أ + (-أ) = -أ + أ = ☐

حيث يسمى (-أ) النظير الجمعى للمصفوفة أ

• طرح المصفوفات :

إذا كانت كل من المصفوفتين على النظم م × ن فإن المصفوفة ح = أ - ب

= أ + (-ب) حيث -ب هو المعكوس الجمعى للمصفوفة ب

• مثال (٣) : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد : ٢أ - ٣ب - ٤جـ

الحل

٢أ = ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ \\ ١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$ ، -٣ب = -٣ $\begin{pmatrix} ٩ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢٧- & ١٢- \\ ٣- & ٩- \end{pmatrix}$

-٤جـ = -٤ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٢ & ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٦- & ٨- \\ ٤٨- & ٢٠- \end{pmatrix}$

٢أ - ٣ب - ٤جـ = ٢أ + (-٣ب) + (-٤جـ)

= $\begin{pmatrix} ١٠ & ٤ \\ ١٦ & ١٢ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٢٧- & ١٢- \\ ٣- & ٩- \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١٦- & ٨- \\ ٤٨- & ٢٠- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣٩- & ١٠- \\ ٣٩- & ١٣- \end{pmatrix}$

• **مثال (٤) :** إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

ء = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س حيث ٢ب − ٣جـ = ٤س − ٣ء

الحـل

∵ ٢ب − ٣جـ = ٤س − ٣ء ∴ ٢ب − ٣جـ + ٣ء = ٤س

∴ س = $\frac{١}{٤}$[٢ب − ٣جـ + ٣ء]

∴ س = $\frac{١}{٤}\left[\left[\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣- \\ ٠ & ٣- & ٠ \\ ٣- & ٠ & ٠ \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}\right]$

س = $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & ٦ \\ ٥ & ٣- & ٣ \\ ١- & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & \frac{٥}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{٥}{٤} & \frac{٣-}{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{١-}{٤} & \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

• **مثال (٥) :** إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س إذا كان ٥ب − س^{مـ} = ٣أ

الحـل

٥ب − س^{مـ} = ٣أ ∴ س^{مـ} = ٥ب − ٣أ = ٥ب + (−٣)أ

∴ س^{مـ} = $\begin{pmatrix} ٢٥ & ١٠ \\ ٤٠ & ٣٠ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١٥- & ٩- \\ ١٨- & ٦- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}$

∴ س = (س^{مـ})^{مـ} = $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ٢٢ & ٢٤ \end{pmatrix}^{مـ}$ = $\begin{pmatrix} ٢٤ & ١ \\ ٢٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

تمرين (٢) : على جمع وطرح المصفوفات

١ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد : أولاً : أ + ٣ب ثانيًا : ٢أ − ٥ب

ثالثًا : ب + ٢جـ − أ ، رابعًا : أ − ٢ب − ٣جـ

---

٢ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١- \\ ٦ & ٣ & ٢- \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة المصفوفة س التى تحقق المعادلة :

أولاً : ٣س − ٣ب = ٢أ ثانيًا : ٣س^{مـ} = أ − ٢ب

ثالثًا : س + ٢أ^{مـ} = ٢ب^{مـ}

---

٣ أوجد قيمة المجهول إذا كان :

[أ] $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

[جـ] $\begin{pmatrix} ٤ & ٢س \\ ٣ & ص \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} ٢- & س \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ٦ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

[ء] $\begin{pmatrix} س & ٢ & ١ \\ ٠ & ص & ٣ \\ ٤ & ٥ & ع \end{pmatrix}$ − $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \\ ٢- & ٣- & ١- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣- & ٥- \\ ٧- & ١ & ٦- \\ ٦ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

أوجد فى كل حالة مما يلى المصفوفة س بحيث :

أولاً : أ + س = ب + جـ

ثانيًا : ٣أ + ٢س = ٢ب − جـ

ثالثًا : ٢(ب − س) = ٢(س − جـ) − ب

رابعًا : $\frac{١}{٢}$(أ + س) = ٣س + ٢ب

خامسًا : ٢أ + س$^{-١}$ = ٢ب − ٥جـ

سادسًا : ٣(س + أ) = ٢س + ب

سابعًا : ٢س + س$^{-١}$ = أ + ٢ب − ٣جـ

ثامنًا : س$^{-١}$ + ٢أ$^{-١}$ = (٢ب + جـ)$^{-١}$

٥ أوجد مصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

س + ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، س − ص = $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$

٦ أوجد المصفوفتين س ، ص بحيث يكون :

٣س + ٢ص = $\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ١١ & ٥- \\ ٥ & ١٢- \end{pmatrix}$ ، ٢س − ٣ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥- \\ ٣ & ١٤ \\ ١٤- & ٥ \end{pmatrix}$

٧ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ١ & ٦ & ١٤- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣- & ٥ \end{pmatrix}$

وكان س + ٢ص = ٤أ + ٢ب ، س − ص = ٣أ − ٢ب

أوجد كلاً من المصفوفتين س ، ص

درس ٣

ضرب المصفوفات

• **إمكانية ضرب مصفوفتين :**

لضرب مصفوفة أ فى مصفوفة ب يجب أن يكون عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

فمثلاً :

$$أ_{م\times هـ} \times ب_{هـ\times ك} = جـ_{م\times ك}$$

إذا كانت المصفوفة أ على نظم م × هـ والمصفوفة ب على نظم هـ × ك

فإن عملية الضرب ممكنة وناتج الضرب مصفوفة على نظم م × ك

• **مثال (١) :** $أ_{٢\times٣} \times ب_{٣\times٢}$ فإن ناتج الضرب $جـ_{٢\times٢}$

• **مثال (٢) :** $أ_{١\times٣} \times ب_{٣\times١}$ فإن ناتج الضرب $جـ_{١\times١}$

• **مثال (٣) :** $أ_{٣\times٢} \times ب_{٣\times٢}$ إمكانية الضرب غير ممكنة

لأن عدد الأعمدة فى الأولى ≠ عدد الصفوف فى الثانية

إذا كان لدينا مصفوفتين أ ، ب وكان هناك إمكانية الضرب .

سؤال : فما هى الطريقة لإيجاد عناصر حاصل الضرب جـ ؟

• **مثال (٤) :** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦- & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد أ × ب ، ب × أ

الحل

أ × ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣\times٢+٥\times١ & ٣\times٨+٥\times٢ \\ ٤\times٢+٦\times١ & ٤\times٨+٦\times٧ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣٥+٣ & ٤٠+٦ \\ ٤٢+٤ & ٤٨+٨ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣٨ & ٤٦ \\ ٤٦ & ٥٦ \end{pmatrix}$

ب × أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٦\times١+٥\times٢ & ٤\times١+٣\times٢ \\ ٦\times٧+٥\times٨ & ٤\times٧+٣\times٨ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٦+١٠ & ٤+٦ \\ ٤٢+٤٠ & ٢٨+٢٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٦ & ١٠ \\ ٨٢ & ٥٢ \end{pmatrix}$

• عناصر الصف الأول مع عناصر العمود الأول ثم العمود الثانى وهكذا تعطى عناصر الصف الأول فى الناتج .

• عناصر الصف الثانى مع عناصر العمود الأول ثم الثانى تعطى عناصر الصف الثانى فى الناتج .

• **لاحظ أن :** أ ب ≠ ب أ ∴ عملية الضرب غير إبدالية

• مثال (٥) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

أثبت أن : $(أ ب)^{ت} = ب^{ت} \times أ^{ت}$

الحـل

الطرف الأيمن :

∵ أ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٤ \\ ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $(أ ب)^{ت} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

الطرف الأيسر :

$ب^{ت} \times أ^{ت} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٩ \\ ١+٤ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $ب^{ت} أ^{ت} = (أ ب)^{ت}$

• لاحظ أن : $أ^{ت} ب^{ت} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣+٢ & ٦+٢ \\ ١+١ & ٣+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

• القاعدة : $(أ ب)^{ت} = ب^{ت} أ^{ت}$ لاحظ أن : $أ^{ت} ب^{ت} \neq ب^{ت} أ^{ت}$

• مصفوفة الوحدة : هى المصفوفة المربعة التى جميع عناصر قطرها الرئيسى تساوى العدد الحقيقى واحد وباقى عناصرها تساوى العدد الحقيقى صفر ورمزها I .

• خواص عملية الضرب : إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات فإن :

(١) خاصية الدمج : أ ب ج = (أ ب)ج = أ(ب ج)

(٢) خاصية المحايد الضربى : أ I = I أ = أ

(٣) خاصية توزيع ضرب المصفوفة على جمعها : أ(ب + ج) = أ ب + أ ج

• مثال (٦) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

أثبت أن : أ(ب + ج) = أ ب + أ ج

الحـل

الطرف الأيمن : ∵ ب + ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

∴ أ(ب + ج) = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+٨ & ١+٨ \\ ١+١٢ & ١+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$

الطرف الأيسر : أ ب + أ ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١+٦ & ١+٤ \\ ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠+٢ & ٠+٤ \\ ٠+٣ & ٠+٦ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$ = الأيمن

تمرين (٣) : على ضرب المصفوفات

١ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب ، ب أ

٢ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب ، ب أ

٣ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد :

أولاً : أ(ب + ج) ثانيًا : (أ ب)ج ثالثًا : $أ^{ت} ب^{ت}$

٤ أوجد قيمة المجهول إذا كان :

[أ] $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$

[ب] $\begin{pmatrix} ٤ & س \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

[جـ] $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ص \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١٧ & ٢ \\ ٢ع & -٢٠ \end{pmatrix}$

٥ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & -٨ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان أب = ب أ

أوجد قيمة س ، ص

٦ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}$ أثبت أن أ^{٢} = ☐

٧ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن أ^{٢} = ٣أ

٨ إذا كانت أ = $\frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ فبين أن أ^{٢} = أ

٩ إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، هـ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ -١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة م^{٢} - م هـ

١٠ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ & -٧ \\ ١٠ & -٥ & ٥ \\ -٨ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أب = ١٠ أ

١١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ب = $\frac{-١}{١١}\begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٧ & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن أب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

١٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان س^{ن} = أب + أ

١٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد س إذا كان س^{ن} + ٣س = أب + ٢ب

١٤ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق : أولاً : ٢أ - ب^{ن} + ٣س = أ^{٢} + ٥س^{ن}

ثانيًا : أب - ٥س = (ب أ)^{ن} + س^{ن}

١٥ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} - ٤أ = ☐

١٦ إذا كانت $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^{٢} - ٤أ + I = ☐

١٧ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} - ٧أ + ١٣I = ☐

١٨ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ^{٢} + ٤أ - ١٧I = ☐

١٩ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^{٢} - أ - ٦I = ☐

سلسلة
المرشد
شرح مراجعة نهائية
سلسلة المرشد لجميع صفوف الشهادة الثانوية الأزهرية

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{pmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويسمى محدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرَّف كالآتى :

$$|أ| = \begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix} = أ ء - ب جـ$$

القطر الرئيسى

مثال (١) : (أ) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٥ & ٩ \\ ٦ & ٦ \end{vmatrix} = ٥ \times ٦ - ٦ \times ٩ = -٢٤$

(ب) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ١ \times ٧ - ٢ \times ٠ = ٧$

تعريف (٢) : يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة .

$$\text{محدد الرتبة الثالثة} = \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & هـ & و \\ ز & ح & ظ \end{vmatrix}$$

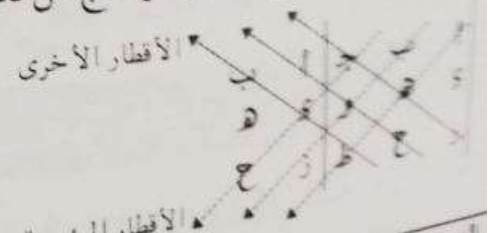
$$= أ \begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ظ \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ء & و \\ ز & ظ \end{vmatrix} + جـ \begin{vmatrix} ء & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

$$= أ(هـ ظ - و ح) - ب(ء ظ - و ز) + جـ(ء ح - هـ ز)$$

$$= أ هـ ظ - أ و ح - ب ء ظ + ب و ز - جـ ء ح - جـ هـ ز$$

$$= أ هـ ظ - ب و ز + جـ ء ح - أ و ح - ب ء ظ - جـ هـ ز$$

ملحوظة هامة : الناتج الأخير هو ناتج عن فك المحدد بطريقة تسمى الأقطار هكذا .



لاحظ أن : الناتج = حاصل ضرب الأقطار الرئيسى − حاصل ضرب الأقطار الأخرى

مثال (٢) : أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

الحل

طريقة الأقطار

الناتج = ٧ × ٤ × ٦ + ٢ × ١ × −١ + ٥ × ٣ × ٢ − ٢ × ٤ × −١ − ٧ × ١ × ٢ − ٢ × ٣ × ٦

= ١٦٦

الطريقة الثانية : الناتج = $٧\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٦ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٧(٢٤ - ٢) - ٢(١٨ + ١) + ٥(٦ + ٤) = ١٦٦$

ملحوظة هامة : يمكن فك المحدد من الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف (عمود) تحت قاعدة الإشارات المأخوذة للعناصر المضروبة فى المحددات الرتبة الثانية

قاعدة الإشارات هى $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

ملحوظة : القطر الرئيسى والقطر الآخر موجبة والباقى سالب .

مثال (٣) : أوجد قيمة المحدد $= \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٨ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

خذ مثلاً عناصر العمود الثانى مع وضع الإشارات وهى − ، + ، − على الترتيب

$$\therefore \text{قيمة المحدد} = -\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= -(١٠ - ٦) + ٢(٦ - ٤٨) - ٤(٣ - ٤٠)$$

$$= -٤ - ٨٤ + ١٤٨ = ٦٠$$

مثال (٤) : الأشكال التالية محدد المصفوفة المثلثية

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٠ \\ ٧ & ٦ & ٥ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٨ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ب & ٠ \\ ٠ & ٠ & جـ \end{vmatrix}$$

تعريف : قيمة المحدد للمصفوفة المثلثية : يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

مثال (٥) : ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٨ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

المحدد هو محدد مصفوفة مثلثية ∴ قيمة المحدد = ٤ × ٨ × ٢ = ٦٤

ملحوظة (١) :

نستخدم المحدد لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث.

إذا كان لدينا مثلث س ص ع إحداثيات رؤوسه هى (أ ، ب) ، (جـ ، ء) ، (هـ ، و)

فإن ترتيب فإن المساحة : $م = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ جـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$

مثال (٦) : أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه هى : (٢ ، ١) ، (٣ ، -٤) ، (٥ ، ٠)

الحل

$$\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٧ \text{ وحدة طول مربع}$$

ملحوظة : تمت عن طريق الأقطار أو المحددات الرتبة الثانية .

تمرين (٤) : على المحددات

• أوجد قيمة المحددات الآتية من (١) الى (٢١) :

١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ٢) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ ٣) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

٤) $\begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ٥) $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ٦) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$

٧) $\begin{vmatrix} ٦ & -٣ \\ ١٩ & -٧ \end{vmatrix}$ ٨) $\begin{vmatrix} أ + س & أ \\ ب + ص & ب \end{vmatrix}$ ٩) $\begin{vmatrix} س + ١ & س^{٢} + ١ \\ ص + ١ & ص^{٢} + ١ \end{vmatrix}$

١٠) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$ ١١) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٦ & ٧ \\ ٠ & ١٠ & ٢ \end{vmatrix}$ ١٢) $\begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ & -٣١ \\ ٥ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

١٣) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٣ & ٢ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ١٤) $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ١٥) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

١٦) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ ١٧) $\begin{vmatrix} -١ & ٧ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ١٨) $\begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

١٩) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٥ & ٩ & ٧ \\ ٠ & ٨ & ٠ \end{vmatrix}$ ٢٠) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٨ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ٢١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٨ & ٦ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

٢٢) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه: أ(٢ ، ٤) ، ب(-٢ ، ٤) ، جـ(٠ ، -٢)

٢٣) أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه :
س(٣ ، ٣) ، ص(-٤ ، ٢) ، ع(١ ، -٤)

٢٤) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه :
أ(-٢ ، -٢) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(-٤ ، ٣)

٢٥) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه :
أ(٠ ، ٢) ، ب(٣ ، ٥) ، جـ(-٣ ، ٢)

درس ٥ : حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أولاً : حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين :

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين :

أ س + ب ص = م ، جـ س + ء ص = هـ

فإن : $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ = (أ ء − ب جـ) تسمى محدد مصفوفة المعاملات وتقرأ (دلتا)

إذا كان Δ ≠ ٠ فإن المعادلات لها حل وجيد ، لكن إذا كان Δ = ٠

فإن للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول أو ليس لها حل .

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} م & ب \\ هـ & ء \end{vmatrix}$ = (م ء − ب هـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول س)

وتقرأ (دلتا للمجهول س) . وضعنا أما كن معاملات س فى دلتا الثوابت م ، هـ

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ & م \\ جـ & هـ \end{vmatrix}$ = (أ هـ − م جـ) تسمى (محدد مصفوفة المجهول ص)

وضعنا أما كن معاملات ص فى دلتا الثوابت م ، هـ

∴ قيمة المجهول ∴ س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$

• مثال (١) : حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر :

س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ − ٢ = ١

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٥ = ١ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٤ = ١

∴ س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١}{١} = ١$ ، ∴ ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = ١$

∴ م . ح = {(١ ، ١)}

ثانيًا : حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل :

• مثال (١) : حل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر :

س + ص − ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ٧ ، ٣س − ص + ع = ١٠

الحل

$\Delta_{(محدد المعاملات)} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{matrix}$

= ٢ + ٣ + ١ − (−٦ − ١ + ١) = ١٢

، Δس = محدد المجهول س نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت ٢ ، ٧ ، ١٠ وهى الحدود المطلقة فى المعادلات الثلاثة بالترتيب .

، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٧ & ٢ & ١ \\ ١٠ & ١- & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٢ \\ ١٠ & ١- \end{matrix}$ = (٤ + ١٠ + ٧) − (−٢٠ + ٢ + ٧) = ٣٦

، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٧ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ١ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٧ \\ ٣ & ١٠ \end{matrix}$ = (٧ + ٦ − ١٠) − (−٢١ + ١٠ + ٢) = ١٢

، $\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٧ \\ ٣ & ١- & ١٠ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{matrix}$ = (٢٠ − ٢١ + ٢) − (١٢ − ٧ + ١٠) = ٢٤

∴ س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣$ ، ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٢}{١٢} = ١$ ، ع = $\frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٢٤}{١٢} = ٢$

∴ م . ح = {(٣ ، ١ ، ٢)}

تمرين (٥) : على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

• أوجد مجموعة الحل بطريقة كرامر :

١ ٣س − ٥ص = ٨ ، س + ص = ٨

٢ ٢س − ٣ص = ٧ ، س + ص = −١

٣ ٢س + ٣ص = ٠ ، ٢س + ٦ص = ٠

٤ س − ٣ص = −٤ ، ٢س + ص = ٢

⑤ س + ٢ص = ٠ ، ٢س − ٣ص = ١

⑥ ٢س − ٣ص + ٥ع = ٧ ، ٣س + ٤ص + ٢ع = ١١ ، س − ٢ص + ٧ع = ١٦

⑦ ٢س + ص − ع = −١ ، ٢س − ص + ٤ع = ١ ، ٥س − ٣ص + ٢ع = ٣

⑧ ٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

⑨ س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢س − ص − ٤ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤

⑩ ص + ٢س + ٣ع = ٦ ، ٢س − ص + ع = −٣ ، س − ٢ص + ٢ع = −١١

درس ٦ المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$

∵ $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٥- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦-٥ & ١٠-١٠ \\ ٣-٣ & ٥-٦+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

بما أن الناتج I ∴ كل منهما معكوس ضربى للآخر .

المصفوفة أ معكوس ضربى لـ ب ، والمصفوفة ب معكوس ضربى لـ أ

سؤال : هل كل المصفوفات لها معكوس ضربى ؟

الجواب : بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًا ، لأن شرط وجود معكوس ضربى أن يكون محدد المصفوفة ≠ ٠

• كيفية إيجاد المعكوس :

بفرض أن المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ وبفرض أن $أ^{-١}$ هو المعكوس الضربى للمصفوفة أ ، وأن محدد أ = Δ ≠ ٠ فإن : $أ^{-١} = \frac{١}{Δ}\begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$

• الخطوات : (١) بدلنا وضعى العنصرين من القطر الرئيسى .

(٢) تغيير إشارتى العنصرين فى القطر الآخر .

(٣) ضرب الناتج السابق × $\frac{١}{Δ}$ حيث Δ هو محدد المصفوفة .

• مثال (١) : إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{-١}$

الحل

∵ Δ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١٥ − ٨ = ٧ ≠ ٠ ∴ المصفوفة لها معكوس ضربى .

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٤- & ٥ \\ ٣ & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٤-}{٧} & \frac{٥}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{٢-}{٧} \end{pmatrix}$

• مثال (٢) : أوجد قيم أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ١٦ & أ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا

الحل

∵ Δ = $\begin{vmatrix} أ & ٤ \\ ١٦ & أ \end{vmatrix}$ = $أ^{٢}$ − ٦٤ ضع Δ = ٠ ∴ $أ^{٢}$ − ٦٤ = ٠

∴ $أ^{٢}$ = ٦٤ ∴ أ = ±٨

∴ ٨ ، −٨ تجعلان المصفوفة ليس لها معكوس ضربى .

∴ عندما أ ∈ ح − {٨ ، −٨} يكون للمصفوفة المعطاة معكوسًا ضربيًا .

• حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة :

إذا كان لدينا معادلتين : $أ_{١}$س + $ب_{١}$ص = $ك_{١}$ ، $أ_{٢}$س + $ب_{٢}$ص = $ك_{٢}$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة مصفوفة واحدة هكذا **أ س = ج**

حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات .

، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، ج = $\begin{pmatrix} ك_{١} \\ ك_{٢} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت

∵ أ س = ج بالضرب × $أ^{-١}$ ∴ $أ^{-١}$ أ س = $أ^{-١}$ ج ∵ $أ^{-١}$ أ = I

∴ س = $أ^{-١}$ ج

• **مثال (٣) :** حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات :

٣س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣

الحل

$$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} ، \quad \text{ص} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - ٤ = -١ \neq ٠ \quad \therefore \text{المصفوفة لها معكوس}$$

$$\because \text{ص} = \text{أ}^{-١} \text{ج} \quad \therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥+٦ \\ -١٠+٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = ١ \ ، \ \text{ص} = ١ \quad \therefore \text{م . ح} = \{(١ ، ١)\}$$

تمرين (٦) : على المعكوس الضربى للمصفوفة

• **أوجد معكوس المصفوفات الآتية إن أمكن . من (١) إلى (١١) :**

١ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ٢ $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ٣ $\text{جـ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$.

٤ $\text{د} = \begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix}$ ، ٥ $\text{هـ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٣ & ١٣ \end{pmatrix}$ ، ٦ $\text{و} = \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

٧ $\text{ز} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ٨ $\text{ح} = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ٩ $\text{ى} = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

١٠ $\text{ص} = \begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ ، ١١ $\text{ع} = \begin{pmatrix} ٥ & -٥ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

١٢ أوجد قيم س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & ٩ \\ ٤ & \text{س} \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى .

١٣ أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{أ} & ٣ \\ ١ & \text{أ}-٢ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى .

١٤ إذا كان : أ × $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ = I أوجد المصفوفة أ

١٥ إذا كانت المصفوفة : ص × $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ص

١٦ فإذا كان : ب = $\begin{pmatrix} \text{س} & -\text{س ص} \\ ٠ & \text{ص} \end{pmatrix}$ فأثبت أن : ب$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{\text{س}} & ١ \\ \frac{١}{\text{ص}} & ٠ \end{pmatrix}$

علمًا بأن س ص ≠ ٠ .

• **حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات .**

من (١٧) إلى (٢١) :

١٧ ٣س + ٧ص = ٢ ، ٢س + ٥ص = ١

١٨ س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

١٩ ٤س + ٣ص = ٢٦ ، ٥س − ص = ٤

٢٠ ٢س − ٧ص = ٣ ، س − ٣ص = ٢

٢١ ٢ص = ٥ − ٣س ، ٢س = ٣ − ص

٢٢ إذا كان : ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix}$ ، أب = I فأوجد المصفوفة أ

٢٣ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة ب .

الوحدة الثانية : البرمجة الخطية

درس ١ حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

• **تمهيد :** المتباينات التالية : س ≤ ٣ ، س < ٨ ، ٢س + ٩ > ٠ ،
٧ > ٢س - ٥ ، ٢س < ٣س - ٥ ≥ ٢س + ٣ تسمى متباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد (حيث س ∈ ح)

• **معنى حل المتباينة فى ح :** هو إيجاد مجموعة جزئية من ح بحيث يحقق كل عنصر من عناصر هذه المجموعة العلاقة المعطاة .

• **خواص علاقة > ، < فى ح :**

إذا كان : أ > ب فإن :
- أ + جـ > ب + جـ حيث جـ ∈ ح
- أ جـ > ب جـ حيث جـ > ٠
- أ جـ < ب جـ حيث جـ < ٠

إذا كان : أ < ب فإن :
- أ + جـ < ب + جـ حيث جـ ∈ ح
- أ جـ < ب جـ حيث جـ > ٠
- أ جـ > ب جـ حيث جـ < ٠

• مثال (١) : حل المتباينة : ٣س + ٤ > ١٠ ومثل الحل على خط الأعداد حيث س ∈ ح

الحل

٣س + ٤ > ١٠ ⇐ ٣س > ٦ بالقسمة على ٣

∴ س > ٢

∴ م . ح =]٢ ، ∞[

• مثال (٢) : أوجد حل المتباينة : ٢س - ٥ ≤ ٤س - ٨ حيث س ∈ ح
ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

٢س - ٥ ≤ ٤س - ٨ ⇐ ٨ - ٥ ≤ ٤س - ٢س ⇐ ٣ ≤ ٢س

∴ $\frac{٣}{٢}$ ≤ س ⇐ س ≥ $\frac{٣}{٢}$ بالقسمة على ٢

∴ م . ح = [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

أو التمثيل

• مثال (٣) : أوجد الحل بطريقتين حيث س ∈ ح ومثل على خط الأعداد
س - ٢ < ٣س - ٤ ≤ س + ٤

الحل

الطريقة الأولى : س - ٢ < ٣س - ٤ ≤ س + ٤ بإضافة (-س) لجميع الأطراف

∴ س - ٢ - س < ٣س - ٤ - س ≤ س + ٤ - س

∴ -٢ < ٢س - ٤ ≤ ٤ بإضافة (٤) لجميع الأطراف

∴ ٢ < ٢س ≤ ٨ (بالقسمة على ٢)

∴ ١ < س ≤ ٤ ∴ م . ح =]١ ، ٤]

التمثيل على خط الأعداد :

أو التمثيل :

الحل بالطريقة الثانية نقسم المتباينة إلى جزئين ونقسم الصفحة إلى نصفين

س - ٢ < ٣س - ٤	٣س - ٤ ≤ س + ٤
٤ - ٢ < ٣س - س	٣س - س ≤ ٨
٢ < ٢س ⇐ ∴ ١ < س	٢س ≤ ٨ ⇐ ∴ س ≤ ٤
∴ م . ح =]١ ، ∞[	∴ م . ح =]-∞ ، ٤]

∴ م . ح للمتباينة الأصلية هى تقاطع الحلين

=]١ ، ∞[∩]-∞ ، ٤] =]١ ، ٤] ∴ الحل على خط الأعداد

تمرين (١) : على حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ومثلها بيانيا :

١ ٣س > ٣
٢ ٣س < -٢
٣ س + ٢ > ٥
٤ س - ٣ < -٥
٥ ٥س ≤ ٤
٦ ٣س ≥ ٧

⑦ ٢ ≤ س

⑨ س − ١ ≤ ٣س − ٥

⑪ −١ ≥ −س + ٢ ≥ ٢

⑬ س − ١ ≥ ٢س − ٥ < س + ٥

⑮ ٢س − ٣ ≥ ٣س − ٥ < س − ٣

⑩ ١ < س − ٣ ≥ ٣

⑫ −٣ < ٤س + ٥ ≥ ٧

⑭ ٣س − ٦ < ٢س + ٦ ≥ ٣س + ١٨

درس ٢ حل المتباينات للدرجة الأولى فى مجهولين (بيانيا)

• **تمهيد :** رسم أى مستقيم على صورة : أ س + ب ص = جـ

نأخذ س = ٠ ونوجد ص ثم نضع ص = ٠ ونوجد س المقابلة ونضع ذلك فى جدول

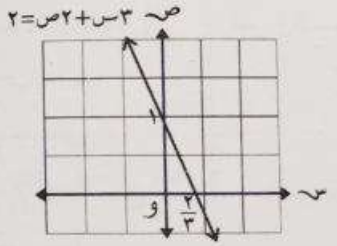
• **مثال (١) :** ارسم المستقيمات الآتية :

(أ) ٣س + ٢ص = ٢ (ب) ٢س − ص = ٠ (جـ) ص = ٢س + ٥

الحل

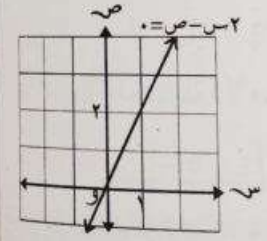
(أ) ٣س + ٢ص = ٢

س	٠	$\frac{٢}{٣}$
ص	١	٠



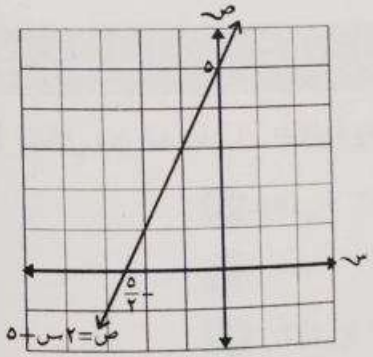
(ب) ٢س − ص = ٠

س	٠	١
ص	٠	٢



(جـ) ص = ٢س + ٥

س	٠	$-\frac{٥}{٢}$
ص	٥	٠



• **ملاحظة :**

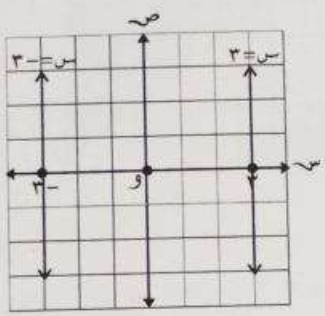
المستقيمات التى على صورة س = أ فهى توازى محور الصادات وتبعد عنه بمقدار أ

والمستقيمات التى على صورة ص = ب فهى توازى محور السينات وتبعد عنه بمقدار ب

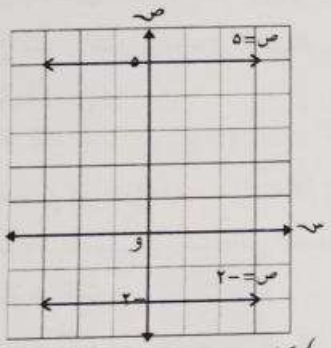
• **مثال (٢) :** ارسم المستقيمات : (أ) س = ٣ ، س = −٣ فى رسم واحد

(ب) ص = ٥ ، ص = −٢ فى رسم واحد

الحل



حل (أ) كل منهما يوازى محور الصادات



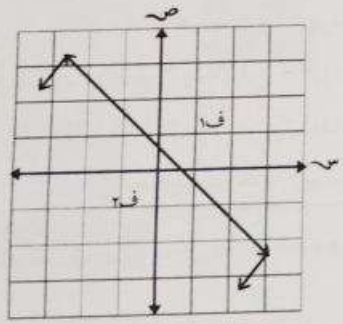
حل (ب) كل منهما يوازى محور السينات

• **ملاحظة هامة :** أى مستقيم على صورة أ س + ب ص = جـ يجزئ المستوى الديكارتى إلى ثلاثة مجموعات من النقط .

أولاً : مجموعة نقط المستقيم نفسه وهى نقط تحقق إحداثياتها المعادلة أ س + ب ص = جـ

ثانيًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على إحدى جانبى المستقيم ف١ .

ثالثًا : مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ف٢ .



• **تعريف :** المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين فى ح × ح هى علاقة على الصورة : أ س + ب ص > جـ أ، أ س + ب ص ≤ جـ

أ، أ س + ب ص < جـ أ، أ س + ب ص ≥ جـ

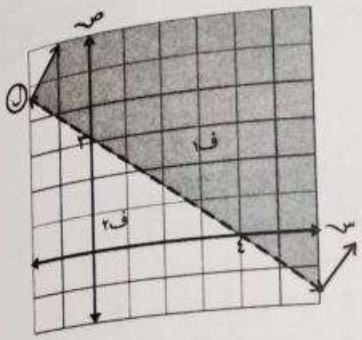
• **مجموعة حل المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين :** هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى ح × ح أى مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التى تحقق المتباينة .

• مثال (٣) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٣س + ٤ص > ١٢ فى ح × ح

طريقة الحل :

أولاً : نرسم المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ بخط متقطع

س	٠	٤
ص	٣	٠



ثانيًا : تحديد نصف المستوى الذى يمثل حل المتباينة وذلك بالتعويض بإحداثى نقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ ٣ × ٠ + ٤ × ٠ ✗ ١٢ ∴ ٠ ✗ ١٢

∴ مجموعة الحل ليست المنطقة التى تقع فيها نقطة الأصل ولذلك نظلل المنطقة الأخرى

• ملاحظات :

(١) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (< أو >) يرسم المستقيم بخط متقطع .

(٢) إذا كانت المتباينة يوجد فيها (≤ أو ≥) يرسم المستقيم بخط متصل .

(٣) إذا وضع ≤ بدلا من < فإن مجموعة هى المنطقة ف١ ∪ مجموعة نقط المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ ويرسم المستقيم غير متقطع

(٤) إذا وضع < بدلاً من > فإن مجموعة الحل هى المنطقة ف٢

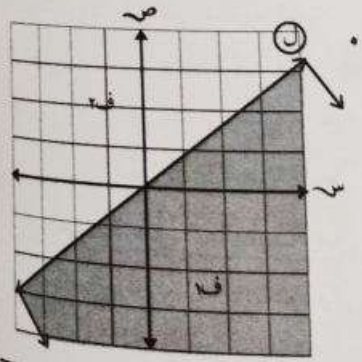
(٥) إذا وضع ≥ بدلاً من > فإن مجموعة الحل اتحاد نصف المستوى ف٢ مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه ويرسم المستقيم غير متقطع .

• مثال (٢) : مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ص − س ≥ ٠

الحل

أولاً : نرسم المستقيم ل الذى معادلته ص − س = ٠

س	٠	١
ص	٠	١



يرسم المستقيم متصل

ثانيًا : ∵ المستقيم ص − س = ٠

يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

لذا نختار نقطة أخرى غير نقطة الأصل ولتكن النقطة (٢ ، ٠) ثم نعوض فى طرفى المتباينة فنجد أن : ٠ − ٢ ≥ ٠ ∴ (٢ ، ٠) ∋ مجموعة حل المتباينة .

ثالثًا : مجموعة الحل هى اتحاد نصف المستوى ف١ مضافًا إليه نقط المستقيم ل نفسه .

• ملاحظات :

(١) حل المتباينة : ص − س < ٠ هى نصف المستوى ف١ فقط .

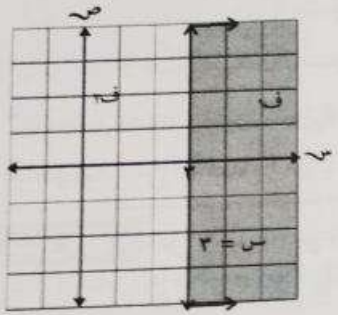
(٢) حل المتباينة : ص − س > ٠ هى نصف المستوى ف٢ .

(٣) حل المتباينة : ص − س ≤ ٠ هى اتحاد نصف المستوى ف١ مضافًا إليه نقط المستقيم ل .

• مثال (٣) : حل المتباينة : (أ) س ≤ ٣ ، (ب) س > −٢

حيث مجموعة الحل فى ح × ح

الحل

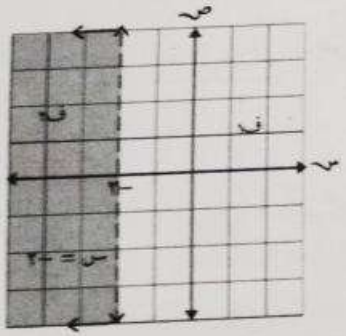


∵ س = ٣ هو مستقيم يوازى محور الصادات كما بالرسم

∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ✗ ٣

∴ مجموعة الحل هى منطقة ف١ مع نقط المستقيم س = ٣

• لاحظ : إن مجموعة حل س ≥ ٣ هى ف١ مع نقط المستقيم س = ٣



(ب) س = −٢ هو مستقيم يوازى محور الصادات كما بالرسم ويرسم المستقيم متقاطع لأن س > −٢

∵ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة الحل لأن ٠ ✗ −٢

∴ مجموعة الحل هى ف٢

• لاحظ : إن مجموعة حل س > −٢ هى ف٢

تمرين (٢) : على حل المتباينات للدرجة الأولى فى مجهولين (بيانيا)

مثل بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية مجموعة الحل فى ح × ح

❶ س > ٣ ❷ ص ≥ ١ ❸ ص > −٣

٤) س − ص > ٠
٥) س − ص < ٥
٦) س + ص > ١
٧) س + ص ≤ ٤
٨) ٢س + ٣ص > ٦
٩) ٢س + ٥ص < ١٠
١٠) ٥س − ٣ص < ٠
١١) ٣س + ٤ص ≤ ٠
١٢) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} > ١$
١٣) $\frac{٣س}{٢} - \frac{٢ص}{٣} < ١$
١٤) $\frac{س}{٢} - ٣ \leq ص$
١٥) $ص \leq ٢ - \frac{س}{٣}$

درس ٣ الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى فى مجهولين

لإيجاد الحل البيانى لمتباينتين نتبع الخطوات التالية :

(١) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الأولى .

(٢) نوجد أو نظلل نصف المستوى الممثل لمجموعة حل المتباينة الثانية .

(٣) مجموعة حل المتباينتين هى المنطقة المشتركة بين هاتين المنطقتين .

• **ملحوظة :** من الأفضل إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لهذين المتباينتين

• **مثال (١) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين : س + ص > ٤ ، س − ص > ٢ فى ح × ح

الحل

أولاً : نرسم المستقيم س + ص = ٤ متقطعًا وليكن ل

س	٠	٤
ص	٤	٠

∵ (٠ ، ٠) ∋ حل المتباينة س + ص > ٤

لأن ٠ > ٤ ∴ منطقة الحل لهذه المتباينة هى المنطقة التى تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : س − ص = ٢ متقطعًا وليكن م

س	٠	٢
ص	−٢	٠

∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (٠ ≯ ٢) ∴ منطقة الحل لا تقع فيها نقطة الأصل

نقطة التقاطع للمستقيمين : س + ص = ٤ ، س − ص = ٢ هى (٣ ، ١)

• **ملحوظة :** المنطقة المظللة هى مجموعة الحل للمتباينتين

مجموعة كلٍ من نقط المستقيمين لا تنتمى إلى الحل

• **مثال (٢) :** مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينتين فى ح × ح :

٤س − ٥ص ≤ −١٠ ، ص + ٢ ≥ ٠

الحل

أولاً : نرسم المستقيم ص = −٢ وليكن ك وهو متصل وهو مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٢) ∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة ص ≥ −٢ لأن ٠ ≥ −٢

∴ مجموعة حل المتباينة تقع فيها نقطة الأصل

ثانيًا : نرسم المستقيم : ٤س − ٥ص = −١٠ غير متقطع وليكن ل وواضح أن نقطة الأصل (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

س	٠	$\frac{٥}{٢}-$
ص	٢	٠

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (−٥ ، −٢) الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين

• **مثال (٣) :** أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢س + ص < ٢ ، س + ٢ص ≥ ٣

الحل

نرسم المستقيمات : ل١ : س = ٠

وهو محور الصادات ومجموعة حل س ≤ ٠ ←

ل٢ : ص = ٠

وهو محور السينات ومجموعة حل ص ≤ ٠ ←

ل٣ : ٢س + ص = ٢ وهو خط متقطع

س	٠	١
ص	٢	٠

(٠ ، ٠) ∋ مجموعة الحل لأن ٠ < ٢

ل٤ : س + ٢ص = ٣ خط غير متقطع

س	٠	٣
ص	$\frac{٣}{٢}$	٠

(٠ ، ٠) ∋ مجموعة الحل لأن ٠ ≥ ٢

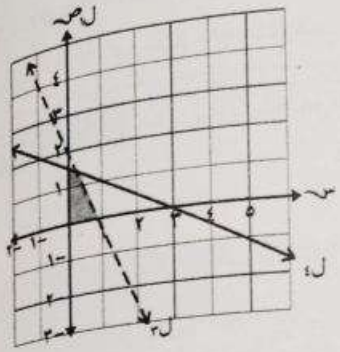
نجمع كل ذلك فى شكل واحد :

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات معًا

نقطة تقاطع المستقيمين هى $(\frac{١}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

• ملحوظة هامة : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

تعنى أن مجموعة الحل تقع فى الربع الأول



تمرين (٣) : على الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر

• مثل بيانيًا مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين (مجموعة الحل فى ح × ح) :

١ س - ص > ١ ، س + ص < ٣

٢ ٢س - ص > -٣ ، س + ص < ١

٣ س + $\frac{٣}{٤}$ص > -٣ ، س - $\frac{٢}{٥}$ص > -١

٤ س - ص > ٠ ، ٢س + ص > ٥

٥ س + ص < ٣ ، س < ص - ١

٦ ٢س - ٥ص ≤ -٢ ، ص > -٢

٧ ص ≤ س - ٢ ، ص ≥ ٢س + ٤

٨ ٢س + ص > ٥ ، ص ≤ ٠

٩ س < ٣ + ٢ص ، س ≥ ٠

١٠ ص > ٢ ، س + ص ≤ -٢

• أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا (مجموعة الحل فى ح × ح) :

١١ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ > ص ، ص + ٢س < ٤

١٢ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤

١٣ س ≤ -٢ ، ص ≥ ٥ ، س - ص ≥ ٣

١٤ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٣س + ٢ص > ٦ ، س + ص ≤ ٢

درس ٤ البرمجة الخطية

البرمجة الخطية : من العلوم الحديثة وهى فى نفس الوقت عملية إيجاد الحل الأمثل لمشكلة ما باستخدام الطرق الرياضية .

فالقيود والإمكانيات الموجودة فى المشكلة أو التى تفرضها طبيعة المشكلة تتحول إلى متباينات والهدف يتحول إلى دالة يسمى **دالة الهدف** وهى فى الغالب أكبر قيمة لربح معين أو أقل قيمة لتكاليف معينة .

• مثال (١) : المتباينات التالية هى قيود وإمكانيات مشكلة ما :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٢ ، س + ص ≥ ٥

وإذا كانت دالة الهدف ر(س ، ص) = ٣س + ٤ص أوجد أكبر قيمة لدالة الهدف

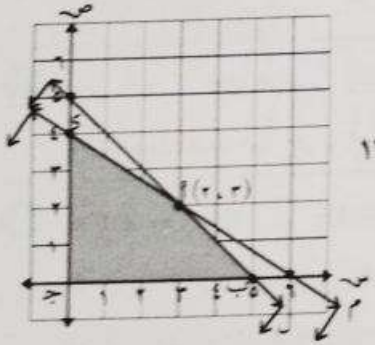
الحل

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يدلان معًا على أن الحلول فى الربع الأول فى المستوى الديكارتى

نرسم المستقيم : ٢س + ٣ص = ١٢

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز م

س	٠	٦
ص	٤	٠



(٠ ، ٠) ∋ مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ص ≥ ١٢

والمستقيم س + ص = ٥

يرسم متصلاً ونرمز له بالرمز ل

س	٠	٥
ص	٥	٠

(٠ ، ٠) ∋ مجموعة حل المتباينة س + ص ≥ ٥

نقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ٣ص = ١٢ ، س + ص = ٥ هى (٣ ، ٢)

منطقة حل المتباينات معًا يمثلها المضلع المظلل أ ب جـ ء ويسمى مضلع الحل، أ ، ب ، جـ ، ء هى رؤوس مضلع الحل وتوجد أكبر قيمة لدالة الهدف أو أصغر قيمة من خلال هذه الرؤوس

∴ م(٣ ، ٢) = ٣ × ٣ + ٢ × ٤ = ١٧ (أكبر قيمة) لدالة الهدف

م(٥ ، ٠) = ٥ × ٣ + ٠ × ٤ = ١٥

م(٠ ، ٠) = ٠ × ٣ + ٠ × ٤ = ٠ (أصغر قيمة) لدالة الهدف

م(٠ ، ٤) = ٠ × ٣ + ٤ × ٤ = ١٦

تمرين (٤) : على البرمجة الخطية

عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا فى المستوى ح × ح ثم عين من مجموعة الحل قيم س ، ص التى تجعل من دالة الهدف أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن :

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س ≤ ٢ص ، س + ص ≥ ٩٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٥س + ٧ص

٢ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≤ ٦ ، ٣س + ٤ص ≤ ١٢

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٥س + ١٠ص

٣ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٨ص ≥ ٣٢ ، ١٢س + ٨ص ≥ ١٢٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٢٥س + ٤٥ص

٤ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ص + ٢س ≤ ٦ ، ٢س + ص ≥ ١٠

ودالة الهدف : م(س ، ص) = ٢س + ٣ص + ٥

٥ -٣ ≤ س ≤ ٣ ، -٤ ≤ ص ≤ ٤

٤س + ٣ص ≥ ١٢ ، ٤س + ٣ص ≤ -١٢

ودالة الهدف : ل = س + ٣ص - ٥

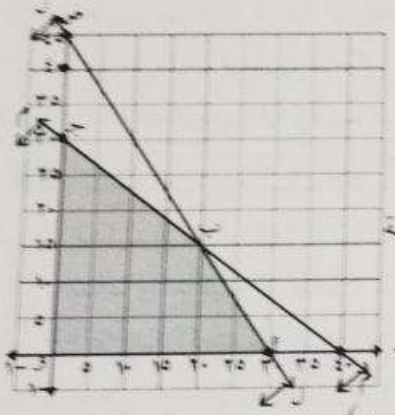
• مثال على البرمجة الخطية الكلامية :

ينتج مصنع رولات ورق حائط وعلب الغراء اللازمة لصقه فإذا كان إنتاج كل ١٠٠ رول ورق يكلف المصنع ١٥٠٠ جنيه ويتطلب ١٢ ساعة عمل وإنتاج كل ١٠٠ علبة غراء يكلف المصنع ٢٠٠٠ جنيه ويتطلب ٨ ساعات عمل وعلمت أن المصنع يعمل أسبوعيًا ٣٦٠ ساعة ويرصد مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيهًا للتكاليف اللازمة ويقدر ربحًا قدره ٣٠٠ جنيهًا لكل ١٠٠ رول ورق وكذا ٣٠٠ جنيهًا لكل ١٠٠ علبة غراء . فما هو الإنتاج الأسبوعى من كل نوع اللذين يضمن للمصنع أكبر ربح ممكن .

الحل

النوع / المتطلبات	ورق الحائط	الغراء	المتاح
تكاليف	١٥٠٠	٢٠٠٠	٦٠٠٠٠
الساعات	١٢	٨	٣٦٠
الفروض	س	ص	س لكل ١٠٠ ، ص لكل ١٠٠

الحدود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ١٢س + ٨ص ≤ ٣٦٠ ، ١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص ≤ ٦٠٠٠٠



دالة الهدف : م(س ، ص) = ٣٠٠س + ٣٠٠ص

المتباينة الأولى تصبح

١٢س + ٨ص = ٣٦٠ بالقسمة على ٤

٣س + ٢ص = ٩٠

ونرمز له بالرمز ل ∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

س	٠	٣٠
ص	٤٥	٠

المتباينة الثانية :

١٥٠٠س + ٢٠٠٠ص = ٦٠٠٠٠ (بالقسمة على ٥٠٠)

∴ ٣س + ٤ص = ١٢٠

س	٠	٤٠
ص	٣٠	٠

(٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة ، نقطة تقاطع المستقيمين (٢٠ ، ١٥)

رءوس مضلع الحل هى (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٣٠) ، (٢٠ ، ١٥) ، (٣٠ ، ٠)

م(٠ ، ٣٠) = ٠ + ٣٠٠ × ٣٠ = ٩٠٠٠ ،

م(٢٠ ، ١٥) = ٣٠٠ × ٢٠ + ٣٠٠ × ١٥ = ١٠٥٠٠

∴ أكبر قيمة عند (٢٠ ، ١٥) وهى ١٠٥٠٠

∴ عدد رول الورق = ٢٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠ رول

عدد علب الغراء = ١٥ × ١٠٠ = ١٥٠٠ علبة غراء

تمرين (٥) : على المسائل الكلامية على البرمجة الخطية

١ مصنع لإنتاج زيوت الطلاء والورنيش يستخدم لذلك ماكينتين أ ، ب بحيث تعمل الماكينة أ لمدة ١٢٠ ساعة أسبوعيًا وتعمل الماكينة ب لمدة ١٤٠ ساعة أسبوعيًا فإذا كان إنتاج الكيلو جرام من زيوت الطلاء تتطلب تشغيل كل من الماكينتين (كل على حدة) لمدة $2\frac{1}{2}$ ساعة وإنتاج الكيلو جرام الواحد من الورنيش يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ٤ ساعات وتشغيل الماكينة ب لمدة ٥ ساعات فإذا علمت أن إدارة المصنع تتوقع ربحًا قدره ٣ جنيهات لكل كجم من الزيت ، ٥ جنيهات لكل كجم من الورنيش ما هو البرنامج الذى يجب تخطيطه ليكون الربح المناظر محققًا لأكبر ربح ممكن .

٢ ينتج مصنع موبيليات نوعين من المناضد (سفرة ومطبخ) ويستخدم لذلك ماكينتين أ ، ب فإذا كان إنتاج منضدة السفرة يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ساعة والماكينة ب لمدة ٣ ساعات ، وكان إنتاج منضدة المطبخ يتطلب تشغيل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ساعة وعلمت أن الماكينة أ يمكن أن تعمل ٩٠ ساعة أسبوعيًا والماكينة ب يمكن أن تعمل لمدة ١٥٠ ساعة أسبوعيًا وأن الربح المنتظر من منضدة السفرة يعادل ٢٠٠ جنيهًا ، والربح المنتظر من منضدة المطبخ يعادل ١٠٠ جنيهًا ، أوجد إنتاج المصنع ليحقق أكبر ربح ممكن .

٣ يمتلك أحد صناع الأثاث ١٦ وحدات من الخشب ، ٤٨ ساعة من الوقت يستغلها فى صنع طرازين من الأثاث ويحتاج الطراز الأول إلى وحدتين من الخشب ، ٦ ساعات عمل ويحتاج الطراز الثانى إلى وحدة واحدة من

الخشب ، ٨ ساعات عمل . فإذا كان ثمن بيع الوحدة من الطراز الأول ١٢٠٠ جنيه وثمن بيع الوحدة من الطراز الثانى ٨٠٠ جنيه ، فكم عدد الوحدات من كل طراز يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد أكبر عائد من المبيعات ؟

٤ ترزى لديه ٦٠ مترًا من الصوف ، ٢٤ مترًا من القماش اللازم للحشو والبطانة الداخلية لبدل وبلاطى الرجال . فإذا كانت البدلة تحتاج إلى ٣ متر من الصوف ، متر واحد من قماش الحشو ويحتاج البالطو إلى ٢,٥ متر من الصوف ، ١,٥ متر من قماش الحشو فحدد عدد البدل والبلاطى التى يجب أن يقوم بتفصيلها هذا الترزى بحيث يحصل على أكبر عائد ممكن فى كل حالة فيما يلى : (أولاً) إذا باع البدلة بسعر ١٨٠ جنيهًا والبالطو بسعر ١٥٠ جنيهًا .

(ثانيًا) إذا باع كل من البدلة والبالطو بسعر ٢٠٠ جنيهًا .

٥ يرغب مدير إحدى حدائق الحيوان فى إطعام حيواناته بأقل تكلفة ممكنة بأن يشترى لهم مالا يقل عن ١٢٠ كجم من البروتينات وعن ٩٠ كجم من الفيتامينات. تقدمت له إحدى الشركات بعطاء لمادتين غذائيتين أ ، ب مجهزتين فى أكياس حسب المواصفات الآتية : فى كيس من النوع أ يحتوى على ٣ كجم بروتين ، ٣ كجم فيتامين . وبسعر ١٠ جنيهات لكل كيس ، وكل كيس من النوع ب يحتوى على ٢ كجم بروتين ، ١ كجم فيتامين وبسعر ٥ جنيهات لكل كيس . كم كيس من كل نوع يمكن أن يشتريها كل يوم وكم يكلفه ذلك ؟

٦ تنتج شركة صناعية نوعية من المنتجات وتستخدم فى إنتاج كل منها نوعين من الآلات آلة (أ) وآلة (ب) وتحتاج وحدة المنتج الأولى إلى $\frac{3}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{1}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) ، وتحتاج وحدة المنتج الثانى إلى $\frac{1}{4}$ ساعة تشغيل على الآلة (أ) ، $\frac{1}{3}$ ساعة تشغيل على الآلة (ب) . فإذا فرض أن الحد الأقصى لفترة تشغيل الآلة (أ) فى اليوم هو ١٢ ساعة وبالنسبة للآلة (ب) هو ١٠ ساعات فى اليوم وعلم أن الوحدة من المنتج الأول تدر ربحًا للشركة قدره ستة جنيهات وأن الوحدة من المنتج الثانى تدر ربحًا للشركة قدره ٥ جنيهات . حدد برنامج الإنتاج الأمثل الذى يحقق للشركة أكبر ربح ممكن .

ثانيًا

حساب المثلثات

درس ١

المتطابقات المثلثية

• الفارق بين مفهومى المعادلة والمتطابقة :

• **المعادلة :** هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقة التى تحقق هذه المتساوية .

فمثلاً : حا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

القيم التى تحقق هذه المتساوية هى : $\frac{\pi}{٣} = ٦٠°$ ، $\frac{٢\pi}{٣} = ١٢٠°$ فقط ولذلك تسمى هذه المتساوية معادلة .

• **المتطابقة :** هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية .

فمثلاً : حا$(\frac{\pi}{٢} ، \theta)$ = حتا θ هى متطابقة على أساس أن المتغير θ يأخذ أى قيمة فتحقق المتساوية ، فلذا هى تسمى متطابقة .

• المتطابقات المثلثية الأساسية:

أولاً : الدوال الأساسية ومقلوباتها :

(١) حا θ × حتا $\theta = ١$ $\Leftarrow$ حا $\theta = \frac{١}{\text{قتا } \theta}$ ، قتا $= \frac{١}{\text{حا } \theta}$

(٢) حتا θ قا $\theta = ١$ (٣) طا θ طتا $\theta = ١$

ثانيًا : الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين :

(١) حا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = حتا θ (٢) حتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = حا θ

(٣) طا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = طتا θ (٤) قتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قا θ

(٥) قا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قتا θ (٦) طا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = طتا θ

ثالثًا : متطابقة الزاويتين θ ، $-\theta$:

حا$(-\theta)$ = $-$حا θ ، قتا$(-\theta)$ = $-$قتا θ ، طا$(-\theta)$ = $-$طاθ ، طتا$(-\theta)$ = $-$طتا θ

لكن مع : حتا$(-\theta)$ = حتا θ ، قا$(-\theta)$ = قا θ

رابعًا : متطابقات فيثاغورث :

(١) العلاقة الأساسية هى : حا$^٢\theta$ + حتا$^٢\theta = ١$ ⟵ (١)

بقسمة طرفى العلاقة (١) على حا$^٢\theta$ ∴ ١ + طا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$ ⟵ (٢)

وبقسمة طرفى العلاقة (١) على حتا$^{٢}\theta$ ∴ ١ + طتا$^{٢}\theta$ = قتا$^{٢}\theta$ ⟵ (٣)

خامسًا : طا $\theta = \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ ، طتا $\theta = \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

• **ملحوظة هامة :** المجموعات الخمسة السابقة تعتبر أمثلة كمتطابقات مثلثية .

أمثلة محلولة

مثال محلول (١) : أثبت أن طا هـ + طتا هـ = قا هـ قتا هـ

الحـــل

الأيمن = $\frac{\text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ} + \frac{\text{حتا}\,هـ}{\text{حا}\,هـ} = \frac{\text{حا}^{٢}\,هـ + \text{حتا}^{٢}\,هـ}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ} = \frac{١}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ}$

$\frac{١}{\text{حا}\,هـ} \times \frac{١}{\text{حتا}\,هـ}$ = قا هـ قتا هـ = الأيسر

مثال محلول (٢) :

أثبت أن : (حا هـ + حتا هـ) (طا هـ + طتا هـ) = قا هـ + قتا هـ

الحـــل

الأيمن = (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{\text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ} + \frac{\text{حتا}\,هـ}{\text{حا}\,هـ}\right)$

= (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{\text{حا}^{٢}\,هـ + \text{حتا}^{٢}\,هـ}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ}\right)$

= (حا هـ + حتا هـ) $\left(\frac{١}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ}\right)$

= $\frac{\text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ} + \frac{\text{حتا}\,هـ}{\text{حا}\,هـ}$

= $\frac{١}{\text{حتا}\,هـ} + \frac{١}{\text{حا}\,هـ}$ = قا هـ + قتا هـ = الأيسر

مثال محلول (٣) : أثبت أن : $\frac{٢\,\text{طتا}\,جـ}{١ + \text{طتا}^{٢}\,جـ}$ = ٢حا جـ حتا جـ

الحـــل

الأيمن = $\frac{\frac{\text{حتا}\,جـ}{\text{حا}\,جـ}^{٢}}{\text{قتا}^{٢}\,جـ} = \frac{٢\,\text{حتا}\,جـ}{\text{حا}\,جـ} \times \text{حا}^{٢}\,جـ = ٢\,\text{حا}\,جـ\,\text{حتا}\,جـ$ = الأيسر

مثال محلول (٤) : أثبت أن : $\frac{\text{طا}\,هـ - \text{طتا}\,هـ}{\text{طا}\,هـ + \text{طتا}\,هـ} = ٢\,\text{حا}^{٢}\,هـ - ١$

الحـــل

الأيمن = $\frac{\frac{\text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ} - \frac{\text{حتا}\,هـ}{\text{حا}\,هـ}}{\frac{\text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ} + \frac{\text{حتا}\,هـ}{\text{حا}\,هـ}} = \frac{\frac{\text{حا}^{٢}\,هـ - \text{حتا}^{٢}\,هـ}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ}}{\frac{\text{حا}^{٢}\,هـ + \text{حتا}^{٢}\,هـ}{\text{حا}\,هـ\ \text{حتا}\,هـ}} = \frac{\text{حا}^{٢}\,هـ - \text{حتا}^{٢}\,هـ}{١}$

= حا^{٢} هـ − حتا^{٢} هـ = حا^{٢} هـ − (١ − حا^{٢} هـ)

= حا^{٢} هـ − ١ + حا^{٢} هـ = ٢حا^{٢} هـ − ١ = الأيسر

مثال محلول (٥) : أثبت أن : $\frac{٢\,\text{حا}^{٣}\,هـ - \text{حا}\,هـ}{\text{حتا}\,هـ - ٢\,\text{حتا}^{٣}\,هـ} = \text{طا}\,هـ$

الحـــل

الأيمن = $\frac{\text{حا}\,هـ\,(٢\text{حا}^{٢}\,هـ - ١)}{\text{حتا}\,هـ\,(١ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ)} = \frac{\text{حا}\,هـ\,(٢(١ - \text{حتا}^{٢}\,هـ) - ١)}{\text{حتا}\,هـ\,(١ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ)}$

= $\frac{\text{حا}\,هـ\,(٢ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ - ١)}{\text{حتا}\,هـ\,(١ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ)}$

= $\frac{\text{حا}\,هـ\,(١ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ)}{\text{حتا}\,هـ\,(١ - ٢\text{حتا}^{٢}\,هـ)}$ = طا هـ = الأيسر

تمرين (١) : على المتطابقات المثلثية

• **مجموعة (أ) :**

١ أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة وأيهما تمثل متطابقة :

[أ] حا $\theta = \frac{١}{٢}$ [ب] حتا $\theta = \frac{١}{٢}$

[جـ] حتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [د] طا $(\theta + \frac{\pi ٣}{٢}) = -\text{طتا}\,\theta$

[هـ] حا(θ − π) = حا θ

[ز] قا(θ − π/٢) = قتا θ

٢ ضع فى أبسط صورة :

[أ] (حا θ + حتا θ)² − ٢حا حتا θ [ب] (θ٢طا + ١) / (θ٢طتا + ١)

[جـ] ١/حتا٢θ − ١/طتا٢θ [د] حتا(θ − π/٢) قا(θ − π/٢)

[هـ] حا(θ − π/٢) / حتا(θ − π/٢) [و] طا θ قتا θ حا(θ − π/٢)

[ز] حا(θ − π/٢) / حتا(θ − π/٢) − θحا / حتا(θ − π) [ح] حا(θ − π) / حتا(θ − π/٢) + θ٢حا / ١ − حتا٢θ

[ط] حا θ قا θ طتا θ + قتا θ طا θ حتا θ

٣ أثبت صحة المتطابقات التالية :

[أ] (θ٢طتا + ١) / (θ٢طا + ١) = θ٢طتا [ب] (θطا + θطتا) / (θقتا + θقا) = ١

[جـ] (قا θ − طا θ)٢ = (١ − حا θ) / (١ + حا θ) [د] (١−حا٢θ)(١−حتا٢θ) / θ٢طا = حتا٢θ

[هـ] حا θ حتا θ / طا θ + قا θ / قا θ قتا θ = ١

• مجموعة (ب) :

١ حتا٤جـ − حا٤جـ / حتا جـ − حا جـ = حتا جـ + حا جـ

٢ حتا٤جـ + حا٢جـ = حتا٢جـ + حا٤جـ

٣ قتا٢جـ + قا٢جـ = قتا٢جـ قا٢جـ

٤ (طا س + طتا س)٢ = قا٢س + قتا٢س

٥ حا ب طا ب = (١ − حتا٢ب) / حتا ب

٦ طتا س + طا س = قا س قتا س

٧ ١/طا٢أ + ١ = ١/حا٢أ

٨ ١ − طا٤جـ = ٢قا٢جـ − قا٤جـ

٩ (حا٣س + حتا٣س)/(حا س + حتا س) + (حا٣س − حتا٣س)/(حا س − حتا س) = ٢

١٠ طا٢جـ − طا٢د = (حا٢جـ − حا٢د) / (حتا٢جـ . حتا٢د)

١١ طتا أ ÷ قا أ قتا أ = ١ − حا٢أ

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حا س = ١/٢ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها = ١/٢ هى ٣٠°

∵ الجيب موجب ∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى .

∴ س = ٣٠° أ، س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° حيث س ∈]٠ ، ٣٦٠°[

∴ م . ع = {π/٦ ، ٥π/٦}

• الحل العام : نضيف لكل ناتج ٢πد حيث د ∈ ص

∴ مجموعة الحل العام : {π/٦ + ٢πد ، ٥π/٦ + ٢πد}

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حتا θ = ١/٢٧ فى ٠ ≤ θ < ٢π

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هى $45° = \frac{\pi}{4}$

∴ حتا (موجبة) ∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الرابع .

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = 360° - 45° = 315° = \frac{7}{4}\pi$

∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

• **ملحوظة هامة :** $315°$ تكافئ $-45°$ ∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج 2π ك

∴ مجموعة الحل العام : $\{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك$\}$ حيث ك ∈ ص

• **ملحوظة :** الحل العام يمكن أن يكون : $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك أ، $\frac{7}{4}\pi + 2\pi$ ك

• مثال (٣) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طا $\theta = \sqrt{3}$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحـل

∵ θ = طا$^{-1}$ $\sqrt{3}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ∵ طا (موجبة) فى الربع الأول والثالث .

∴ م . ح فى $[0, 2\pi]$ هى $\frac{\pi}{3}$ ، $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

• **الحل العام :** نضيف للناتج الأول فقط π ك وهى مع الطا ، طتا

∴ الحل العام : $\frac{\pi}{3} + \pi$ ك

• مثال (٤) : أوجد مجموعة حل المعادلة : طا $\theta = 2$حا θ حيث $\theta \in [0, 360°]$

الحـل

∴ $\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} = 2$حا θ ∴ حا $\theta = 2$حا θ حتا θ

∴ حا $\theta - 2$حا θ حتا $\theta = 0$ ∴ حا θ(١ − ٢حتا θ) = ٠

∴ حا $\theta = 0$ أ، حتا $\theta = \frac{1}{2}$

∴ عندما حا $\theta = 0$ ∴ $\theta = 0$ أ، $180°$ ، $360°$

عندما حتا $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = 60°$ ، $300°$

∴ م . ح = $\{0, 60°, 180°, 300°, 360°\}$

• مثال (٥) : حل المعادلة : قا $\theta - 2$حتا $\theta = 1$ حيث $\theta \in [0, 360°]$

الحـل

∵ قا $\theta = \frac{1}{\text{حتا}\,\theta}$ ∴ $\frac{1}{\text{حتا}\,\theta} - 2$حتا $\theta = 1$

∴ $1 - 2$حتا$^2\theta$ = حتا θ ∴ 2حتا$^2\theta$ + حتا $\theta - 1 = 0$

∴ (٢حتا $\theta - 1$)(حتا $\theta + 1$) = ٠

∴ ٢حتا $\theta - 1 = 0$ أ، حتا $\theta = -1$

حتا $\theta = \frac{1}{2}$ | $\theta = 180°$

∴ $\theta = 60°$ ، $300°$

∴ م . ح = $\{60°, 180°, 300°\}$

تمرين (٢) : على حل المعادلات المثلثية

• مجموعة (أ) :

• أوجد مجموعة حل المعادلات التالية : حيث صفر° ≤ س ≤ $360°$

١	حا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	($45°$ ، $135°$)
٢	حتا س = $-\frac{1}{2}$	($120°$ ، $240°$)
٣	طا^2 س = ٣	($60°$ ، $120°$ ، $240°$ ، $300°$)
٤	حا س = حتا س	($45°$ ، $225°$)
٥	٢حا س = طا س	(٠° ، $180°$ ، $60°$ ، $300°$)
٦	٢حا س − قتا س = ١	($210°$ ، $330°$ ، $90°$)
٧	حا^2 س − ٢حتا س + $\frac{1}{4}$ = ٠	($60°$ ، $300°$)
٨	٢حا س − ٤حتا س = صفر	($26°\,63'$ ، $26°\,63'$ ، $243°$)
٩	٢حتا^2 س = ٥حتا س + ٣	($120°$ ، $240°$)
١٠	حا س = ٢	(ليس لها حل)
١١	طا س = −١	
١٢	حا$^2\theta$ − حتا$^2\theta$ = $\frac{1}{2}$	
١٣	٥ طتا$^2\theta$ − ٦ قتا θ = ٣	

• **مجموعة (ب) :** • أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية :

١) ظا θ = ١
٢) ٢ جتا θ = ١
٣) ٢ جا θ − √٣ = ٠
٤) جا² θ − جتا θ = ٠
٥) √٢ جا θ جتا θ − جا θ = ٠
٦) جا θ = جا ٢θ
٧) ٢ جا² θ − جا θ = ٠
٨) ظا θ = √٣ / ٣
٩) جا θ = √٣ / ٢

درس ٣ حل المثلث القائم الزاوية

• للمثلث ٦ عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويتعين عناصر أى Δ إذا علم قياسات أية ثلاث منها على أن يكون أحداها ضلعًا على الأقل .

• معنى حل Δ هو إيجاد قياسات العناصر غير المعلومة فيه .

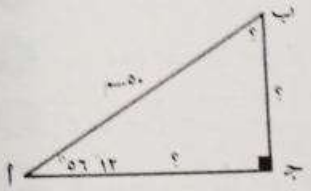
• قاعدة عامة : فى Δ القائم الزاوية

طول الضلع المطلوب / طول الضلع المعلوم = دالة مثلثية لزاوية حادة فى Δ

• مثال (١) :

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث :

ق(∠أ) = ٥٦° ١٢′ ، أ ب = ٥٠ سم



الحل

ق(∠ب) = ٩٠° − ٥٦° ١٢′ = ٣٣° ٤٨′

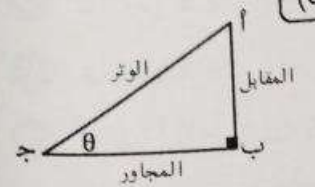
(90 − 56 . »» 12 . »» = 33° 48′)

∵ ب جـ / أ ب = حا أ ∴ ب جـ = أ ب حا أ = ٥٠ × حا ٥٦° ١٢′ ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41.5)

، ∵ أ جـ / أ ب = جتا أ

∴ أ جـ = أ ب جتا أ = ٥٠ جتا ٥٦° ١٢′ ≃ ٢٧,٨ سم



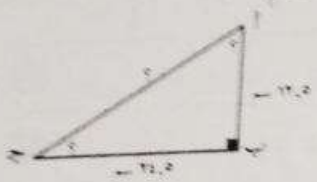
• تذكر أن :

ظا θ = المقابل / المجاور ، حا θ = المقابل / الوتر ، جتا θ = المجاور / الوتر

• مثال (٢) : حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ٢٤,٥ سم

الحل



ق(∠جـ) = ١٢,٥ / ٢٤,٥ = ظا جـ

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على جـ

(12.5 ÷ 24.2 = SH Tan (Ans) = 27° 1′ 51.1″)

∴ ق(∠جـ) = ٢٧° ١′ ٥١″

∴ ق(∠أ) = ٩٠° − ق(∠جـ) = ٩٠° − ٢٧° ١′ ٥١″ = ٦٢° ٥٨′ ٩″

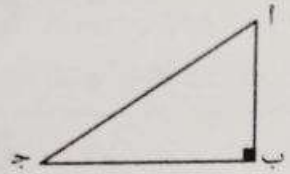
∵ حا جـ = أ ب / أ جـ ⇐ أ جـ = أ ب / حا جـ = ١٢,٥ / حا جـ

العملية على الآلة :

(12.5 ÷ sin 27° 1′ 51″ ≃ 27.5)

أو أ جـ = √(١٢,٥)² + (٢٤,٥)² ≃ ٢٧,٥ سم

• ملحوظة هامة : إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

(أ ب)² = (أ جـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أ جـ)² − (أ ب)²

[هـ] حا(θ − π) = − حا θ

[و] طا θ = $\frac{١}{٣٧}$ [و] طتا θ = $\frac{١}{٣٧}$

[ز] قا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = قتا θ

٢ ضع فى أبسط صورة :

[أ] (حا θ + حتا θ)^{٢} − ٢حا حتا θ [ب] $\frac{١ + \text{طا}^{٢}\theta}{١ + \text{طتا}^{٢}\theta}$

[جـ] $\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\theta} - \frac{١}{\text{طتا}^{٢}\theta}$ [د] حتا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) قا($\frac{\pi}{٢}$ − θ)

[هـ] $\frac{\text{حا}(\theta - \frac{\pi}{٢})}{\text{حتا}(\theta - \frac{\pi}{٢})}$ [و] طا θ قتا θ حا($\frac{\pi}{٢}$ − θ)

[ز] $\frac{\text{حا}(\theta - \frac{\pi}{٢})}{\text{حتا}(\theta - \frac{\pi}{٢})} - \frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}(\theta - \pi)}$ [ح] $\frac{\text{حا}(\theta - \pi)}{\text{حتا}(\theta - \frac{\pi}{٢})} + \frac{\text{حا}^{٢}\theta}{١ - \text{حتا}^{٢}\theta}$

[ط] حا θ قا θ طتا θ + قتا θ طا θ حتا θ

٣ أثبت صحة المتطابقات التالية :

[أ] $\frac{١ + \text{طتا}^{٢}\theta}{١ + \text{طا}^{٢}\theta}$ = طتا^{٢} θ [ب] $\frac{\text{طا}\theta + \text{طتا}\theta}{\text{قا}\theta + \text{قتا}\theta}$ = ١

[جـ] (قا θ − طا θ)^{٢} = $\frac{١ - \text{حا}\theta}{١ + \text{حا}\theta}$ [د] $\frac{(١ - \text{حا}^{٢}\theta)(١ - \text{حتا}^{٢}\theta)}{\text{طا}^{٢}\theta}$ = حتا^{٤} θ

[هـ] $\frac{\text{حا}\theta \text{ حتا}\theta}{\text{طا}\theta} + \frac{\text{قا}\theta}{\text{قا}\theta \text{ قتا}\theta}$ = ١

• مجموعة (ب) :

١ $\frac{\text{حتا}^{٤}\text{جـ} - \text{حا}^{٤}\text{جـ}}{\text{حتا جـ} - \text{حا جـ}}$ = حتا جـ + حا جـ

٢ حتا^{٤} جـ + حا^{٢} جـ = حتا^{٢} جـ + حا^{٤} جـ

٣ قتا^{٢} جـ + قا^{٢} جـ = قتا^{٢} جـ قا^{٢} جـ

٤ (طا س + طتا س)^{٢} = قا^{٢} س + قتا^{٢} س

٥ حا ب طا ب = $\frac{١ - \text{حتا}^{٢}\text{ب}}{\text{حتا ب}}$

٦ طتا س + طا س = قا س قتا س

٧ $\frac{١}{\text{طا}^{٢}\text{أ}} + ١ = \frac{١}{\text{حا}^{٢}\text{أ}}$

٨ ١ − طا^{٤} جـ = ٢قا^{٢} جـ − قا^{٤} جـ

٩ $\frac{\text{حا}^{٣}\text{س} + \text{حتا}^{٣}\text{س}}{\text{حا س} + \text{حتا س}} + \frac{\text{حا}^{٣}\text{س} - \text{حتا}^{٣}\text{س}}{\text{حا س} - \text{حتا س}}$ = ٢

١٠ طا^{٢} جـ − طا^{٢} ء = $\frac{\text{حا}^{٢}\text{جـ} - \text{حا}^{٢}\text{ء}}{\text{حتا}^{٢}\text{جـ} \cdot \text{حتا}^{٢}\text{ء}}$

١١ طتا أ ÷ قا أ قتا أ = ١ − حا^{٢} أ

درس ٢ حل المعادلات المثلثية

• مثال (١) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حا س = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∵ الجيب موجب ∴ الزاوية س تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى .

∴ س = ٣٠° أ، س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° حيث س ∈]٠ ، ٣٦٠°[

∴ م . ح = {$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi٥}{٦}$}

• الحل العام : نضيف لكل ناتج ٢π ك حيث ك ∈ ص

∴ مجموعة الحل العام : {$\frac{\pi}{٦}$ + ٢π ك ، $\frac{\pi٥}{٦}$ + ٢π ك }

• مثال (٢) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : حتا θ = $\frac{١}{٢٧}$ فى ٠ < θ < ٢π

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هى $45° = \frac{\pi}{4}$

∴ حتا (موجبة) ∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الرابع .

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = 360° - 45° = 315° = \frac{7}{4}\pi$

∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

• **ملحوظة هامة :** $315°$ تكافئ $-45°$ ∴ م . ح = $\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$

• **الحل العام :** نضيف لكل ناتج 2π ∈

∴ مجموعة الحل العام : $\{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ∈$\}$ حيث ∈ ∈ ص

• **ملحوظة :** الحل العام يمكن أن يكون : $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ∈ أ، $\frac{7}{4}\pi + 2\pi$ ∈

• مثال (٣) : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طا $\theta = \sqrt{7}$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$
ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

الحل

∵ θ = طا$^{-1}\sqrt{7}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{3}$. ∵ طا (موجبة) فى الربع الأول والثالث .

∴ م . ح فى $[0, 2\pi]$ هى $\frac{\pi}{3}$ ، $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

• **الحل العام :** نضيف للناتج الأول فقط π ∈ وهى مع الطا ، طتا

∴ الحل العام : $\frac{\pi}{3} + \pi$ ∈

• مثال (٤) : أوجد مجموعة حل المعادلة : طا $\theta = 2$حا θ حيث $\theta \in [0, 360°]$

الحل

∴ $\frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta} = 2$حا θ ∴ حا $\theta = 2$حا θ حتا θ

∴ حا $\theta - 2$حا θ حتا $\theta = 0$ ∴ حا $\theta(1 - 2$حتا $\theta) = 0$

∴ حا $\theta = 0$ أ، حتا $\theta = \frac{1}{2}$

∴ عندما حا $\theta = 0$ ∴ $\theta = 0$ أ، $180°$ ، $360°$

عندما حتا $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = 60°$ ، $300°$

∴ م . ح = $\{0, 60°, 180°, 300°, 360°\}$

• مثال (٥) : حل المعادلة : قا $\theta - 2$حتا $\theta = 1$ حيث $\theta \in [0, 360°[$

الحل

∵ قا $\theta = \frac{1}{\text{حتا}\,\theta}$ ∴ $\frac{1}{\text{حتا}\,\theta} - 2$حتا $\theta = 1$

∴ $1 - 2$حتا$^2\theta$ = حتا θ ∴ 2حتا$^2\theta$ + حتا $\theta - 1 = 0$

∴ (٢حتا $\theta - 1$)(حتا $\theta + 1$) = ٠

∴ ٢حتا $\theta - 1 = 0$ أ، حتا $\theta = -1$

حتا $\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = 180°$
∴ $\theta = 60°$ ، $300°$	

∴ م . ح = $\{60°, 180°, 300°\}$

تمرين (٢) : على حل المعادلات المثلثية

• مجموعة (أ) :

• أوجد مجموعة حل المعادلات التالية : حيث صفر° ≤ س ≤ ٣٦٠°

١	حا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(٤٥° ، ١٣٥°)
٢	حتا س = $-\frac{1}{2}$	(١٢٠° ، ٢٤٠°)
٣	طا^2 س = ٣	(٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°)
٤	حا س = حتا س	(٤٥° ، ٢٢٥°)
٥	٢حا س = طا س	(٠° ، ١٨٠° ، ٦٠° ، ٣٠٠°)
٦	٢حا س − قتا س = ١	(٢١٠° ، ٣٣٠° ، ٩٠°)
٧	حا^2 س − ٢حتا س + $\frac{1}{4}$ = ٠	(٦٠° ، ٣٠٠°)
٨	٢حا س − ٤حتا س = صفر	(٢٦° ٦٣ ، ٢٦° ٢٤٣)
٩	٢حتا^2 س = ٥حتا س + ٣	(١٢٠° ، ٢٤٠°)
١٠	حا س = ٢	(ليس لها حل)
١١	طا س = −١	
١٢	حا$^2\theta$ − حتا$^2\theta$ = $\frac{1}{2}$	
١٣	٥ طتا$^2\theta$ − ٦ قتا θ = ٣	

• مجموعة (ب) : • أوجد الحل العام لكل من من المعادلات التالية :

١ ظا θ = ١

٢ ٢ حتا θ = ١

٣ ٢ حتا θ − √٣ = ٠

٤ حتا² θ − حتا θ = ٠

٥ √٢ حا θ حتا θ − حا θ = ٠

٦ حا θ = √٣/٢

٧ ظا θ = √٣/٢

٨ حتا θ = ٢ حا θ

٩ ٢ حا² θ − حا θ = ٠

درس ٣ حل المثلث القائم الزاوية

• للمثلث ٦ عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويتعين عناصر أى Δ إذا علم قياسات أية ثلاث منها على أن يكون أحداها ضلعًا على الأقل .

• معنى حل Δ هو إيجاد قياسات العناصر غير المعلومة فيه .

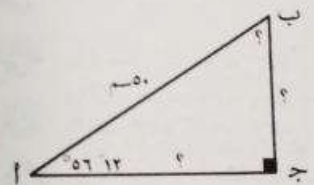
• قاعدة عامة : فى Δ القائم الزاوية

طول الضلع المطلوب / طول الضلع المعلوم = دالة مثلثية لزاوية حادة فى Δ

• مثال (١) :

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ حيث :

ق(أ) = ٥٦° ١٢′ ، أ ب = ٥٠ سم



الحل

ق(ب) = ٩٠° − ٥٦° ١٢′ = ٣٣° ٤٨′

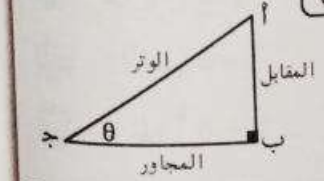
(90 − 56 . »» 12 . »» = 33° 48°)

∵ ب جـ / أ ب = حا أ ∴ ب جـ = أ ب حا أ = ٥٠ × حا ٥٦° ١٢′ ≃ ٤١,٥ سم

(50 × sin 56 »» 12 »» = 41.5)

، ∵ أ جـ / أ ب = حتا أ

∴ أ جـ = أ ب حتا أ = ٥٠ حتا ٥٦° ١٢′ ≃ ٢٧,٨ سم



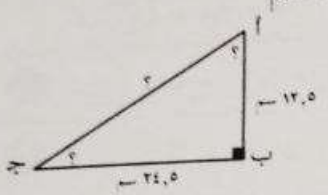
• تذكر أن :

ظا θ = المقابل / المجاور ، حا θ = المقابل / الوتر ، حتا θ = المجاور / الوتر

• مثال (٢) : حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ٢٤,٥ سم

الحل



١٢,٥ / ٢٤,٥ = ظا جـ

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على جـ

(12.5 ÷ 24.2 = SH Tan (Ans) = 27° 1′ 51.1″)

∴ ق(جـ) = ٢٧° ١′ ٥١″

∴ ق(أ) = ٩٠° − ق(جـ) = ٩٠° − ٢٧° ١′ ٥١″ = ٦٢° ٥٨′ ٩″

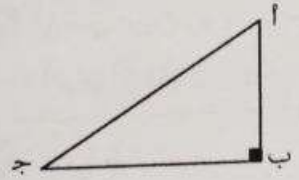
∵ حا جـ = ١٢,٥ / أ جـ ⇐ أ جـ = ١٢,٥ / حا جـ

العملية على الآلة :

(12.5 ÷ sin 27° 1′ 51″ ≃ 27.5)

أو أ جـ = √(١٢,٥)² + (٢٤,٥)² ≃ ٢٧,٥ سم

• ملحوظة هامة : إذا علم طولى ضلعين فى Δ قائم الزاوية فيمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستخدام فيثاغورث :



(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

(أ ب)² = (أ جـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أ جـ)² − (أ ب)²

تمرين (٢) : على حل المثلث القائم الزاوية

١ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٥ سم ، ق(∠ جـ) = ٥٣°

٢ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم .

٣ حل Δ س ص ع القائم الزاوية فى ص ، إذا كان : س ص = ١٥ سم ، ق(∠ ع) = ٣٧° ٢٤′

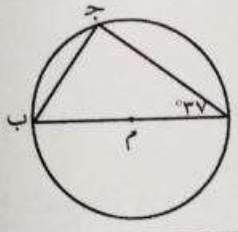
٤ حل Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى جـ ، إذا كان : أ جـ = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٥ سم .

٥ أ ب جـ Δ رسم $\overleftrightarrow{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ يقطعه فى ء ، وكان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم ، فأوجد قياس كل زوايا المثلث .

٦ أ ب جـ Δ فيه : ق(∠ أ) = ١٠٠° ، ق(∠ ب) = ٣٠° ، رسم $\overleftrightarrow{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ قطعه فى ء فإذا كان : أ ء = ١٢ سم ، فأوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ .

٧ Δ متساوى الساقين طول ارتفاعه ١٠ سم ، قياس زاوية رأسه ٤٢° أوجد طول قاعدته .

٨ **فى الشكل المقابل :**



دائرة مركزها م ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها :
فإذا كان أ جـ = ١٢ سم ، ق(∠ أ) = ٣٧°
فأوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب رقمين عشريين .

٩ Δ س ص ع فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم ، أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد قياس (∠ س)

١٠ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨° ، احسب طول هذا الوتر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

١١ أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{أ ء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، أ ب = جـ ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، أوجد قياس كل من ق(∠ أ) ، ق(∠ ب)

درس ٤

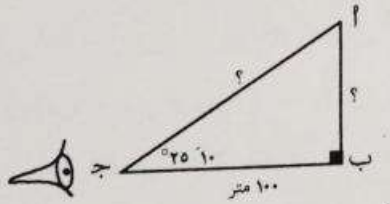
زوايا الارتفاع والانخفاض

- الشخص الذى ينظر إلى أسفل على هدف ما يرسم زاوية انخفاض أما إذا نظر إلى أعلى على هدف ما فهو يرسم زاوية ارتفاع .
- قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض المرسومتان بين عين الراصد والهدف لأنها قياسا زاويتين متبادلتين .
- الشعاع الأفقى وشعاع الهدف يقعان فى مستوى واحد .
- فى جميع المسائل نهمل طول الشخص إلا إذا نص فى المسألة على غير ذلك .

• مثال (١) :

رصد رجل قمة برج من نقطة تبعد عن قاعدته ١٠٠ م فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمته ٢٥° ١٠′ ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

الحـــل



المطلوب إيجاد ارتفاع البرج أ ب

∵ ظا جـ = $\frac{أ ب}{ب جـ}$

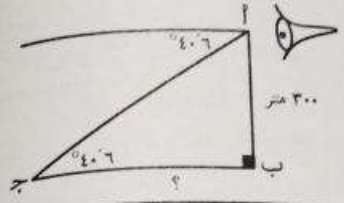
∴ أ ب = ب جـ ظا جـ = ١٠٠ ظا ٢٥° ١٠′ ≃ ٤٧ م

• مثال (٢) :

من قمة فنار ارتفاعه ٣٠٠ م فوق سطح البحر رصد شخص سفينة وكان قياس زاوية انخفاضها ٤٠° ٦′ ، فما بعد السفينة عن الفنار ؟

الحـــل

نعتبر أن (أ ب) هو طول الفنار والمطلوب إيجاد بعد السفينة عن الفنار يعنى إيجاد



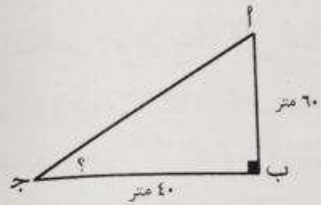
طول (ب جـ)

ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ظا ٤٠° ٦′ = $\frac{٣٠٠}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ = $\frac{٣٠٠}{\text{ظا ٤٠° ٦′}}$ ≃ ٣٥٦ م

• مثال (٣) :

منذنة ارتفاعها ٦٠ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع قمتها من نقطة على بعد ٤٠ م منها ونقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدتها .



الحل

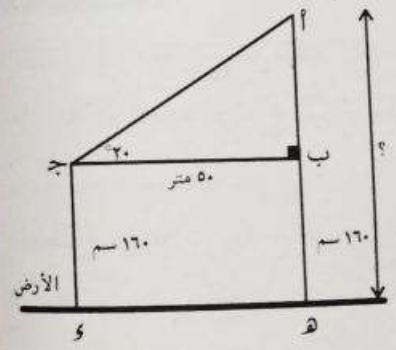
∵ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ظا جـ = $\frac{٦٠}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ق(جـ) = ٥٦° ١٩′

• مثال (٤) :

رجل طوله ١٦٠ سم يقف على بعد ٥٠ م من قاعدة عمود رأسى ورصد قمة العمود فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٠° ، أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض لأقرب متر .

الحل



المطلوب طول العمود = أ ب + ب هـ

= أ ب + ١,٦ م

فى Δ أ ب جـ : ∵ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ أ ب = ب جـ ظا جـ = ٥٠ ظا ٢٠° ≃ ١٨,٢ م

∴ طول العمود = ١٨,٢ + ١,٦ = ١٩,٨ ≃ ٢٠ م

تمرين (٤) : على زوايا الارتفاع والانخفاض

١ من نقطة على سطح الأرض على بعد ٥٠ م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع البرج ٥٨° ٢٤′ ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

٢ من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ م عن سطح البحر وجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة ٢٥° ١٤′ ، أوجد بعد السفينة عن قاعدة الصخرة .

٣ منذنة ارتفاعها ٤٥ م ، أوجد قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فيها من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدتها وتبعد عنها ٣٨ م .

٤ رجل طوله ١٧٠ سم يقف على بعد ٨٠ م من قاعدة برج فكان قياس زاوية ارتفاع قمته ٧٤° ٣٨′ ، أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض لأقرب م .

٥ قاس راصد زاوية ارتفاع منطاد ثابت فوجدها ٥٢° ٢٥′ ولما سار نحو المنطاد فى خط مستقيم ٥٠٠ م وجد أن زاوية ارتفاعه أصبحت ٦٨° ٢٨′ ، أوجد ارتفاع المنطاد .

٦ رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ م عن سطح الأرض ، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٥° ١٧′ ، أوجد المسافة بين الشخص والطائرة لأقرب م .

٧ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ م من سطح الأرض قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ م عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان .

٨ وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ م ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتى انخفاضيهما فوجدهما ٣٨° ، ٥٥° ، أوجد البُعد بين السفينتين لأقرب متر .

٩ عمود إنارة طوله ٩,٤ متر يلقى ظلا على الأرض طوله ٥,٦ متر ، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ .

١٠ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ م رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية انخفاضها ٠,١١ˆ وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانيًا فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها فوجدت ٠,٢٢ˆ ، احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة .

درس ٥ القطاع الدائرى والقطعة الدائرية

• تعريف : القطاع الدائرى

هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ونصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس ففى الرسم .

م ا هـ ب القطاع الأصغر ، (ا م ب) تسمى بزاوية القطاع الأصغر .

م ا ء ب قطاع أكبر وتسمى (ا م ب) المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر .

• القوانين لمساحة القطاع الدائرى :

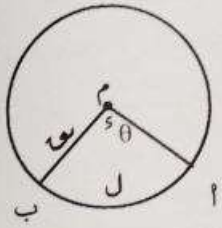
من الرسم المقابل ، إذا كان :

ل = طول قوس القطاع الأصغر

ن = طول نصف قطر دائرة القطاع

θ° = القياس الدائرى لزاوية القطاع

س° = القياس الستينى لزاوية القطاع



• مساحة القطاع الدائرى :

= $\frac{1}{2}$ ل ن = $\frac{1}{2}$ θ° ن^2 بمعلومية ل ، ن

= $\frac{\theta^\circ}{ط2}$ × مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الدائرى

= $\frac{س^\circ}{360^\circ}$ × مساحة سطح الدائرة

بمعلومية القياس الستينى

قواعد مساعدة

مساحة الدائرة = ط ن^2

محيط الدائرة = 2ط ن

ل = θ° ن

$\theta^\circ = \frac{س^\circ \times ط}{180^\circ}$

$س^\circ = \frac{\theta^\circ \times 180^\circ}{ط}$

محيط القطاع = 2ن + ل

• مثال (١) :

أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠° وطول نصف قطر دائرته ٥ سم .

الحل

مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{360^\circ}$ × مساحة سطح الدائرة = $\frac{60^\circ}{360^\circ}$ × ط × 25 = 13,09 سم^2

• مثال (٢) :

قطاع دائرى مساحته ٦ سم^2 ومحيطه ١٤ سم ، أوجد نصف قطر القطاع وطول القوس ؟

الحل

المساحة = $\frac{1}{2}$ ل ن ∴ ٦ = $\frac{1}{2}$ ل ن ∴ ل ن = ١٢ ... (١)

المحيط = 2ن + ل = ١٤ ∵ ل = ١٤ − 2ن عوض فى (١)

ن(١٤ − 2ن) = ١٢ ⇐ ١٤ ن − 2ن^2 = ١٢

2ن^2 − ١٤ن + ١٢ = صفر بالقسمة على ٢

ن^2 − ٧ن + ٦ = ٠ ⇐ (ن − ٦) (ن − ١) = ٠

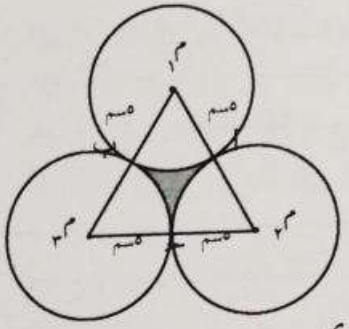
∴ ن = ٦ أ، ن = ١

عندما ن = ٦ ∴ ل = ٢ أ، عندما ن = ١ ∴ ل = ١٢

• مثال (٣) :

ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم ، أوجد مساحة السطح المحصور بين هذه الدوائر .

الحل



من هندسة الشكل القطاعات :

م١ أ ب ، م٢ أ جـ ، م٣ ب جـ

متساوية فى المساحة

∴ مساحة الجزء المظلل =

مساحة المثلث م١ م٢ م٣ − ٣ مساحة أى قطاع دائرى

= $\frac{1}{2}$ م١ م٢ × م٢ م٣ حا ٦٠° − ٣ × $\frac{60^\circ}{360^\circ}$ × ط ن^2

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ − ٣ × $\frac{1}{6}$ × ط × ٢٥

= ٣٩,٢٦٩٩١ − ٤٣,٣٠١٢٧ = ٤,٠٣ ≃ ٤ سم^2

ملحوظة

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب أى ضلعين فى حا الزاوية بينهما .

تمرين (٥) : على القطاع الدائرى (من امتحانات الأزهر)

١ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ٦ سم ، وطول قطر دائرته ٨ سم .

٢ قطاع دائرى مساحته ٣٦ سم^{٢} ، طول قوسه ٤,٥ سم
(١) أوجد طول نصف القطر .
(٢) أوجد القياس الدائرى والستينى لزاويته .

٣ قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^{٢} ، قياس زاويته الدائرى ٠,٦ ، أحسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه .

٤ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٢٠ سم ومساحة سطحه ٢٠٠ سم^{٢} ، أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته بكل من التقديرين الستينى والدائرى .

٥ قطاع دائرى مساحته ٤ سم^{٢} ومحيطه ٨ سم ، أحسب طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياسين الدائرى والستينى .

٦ دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم فيها وتر $\overline{أب}$ طوله ١٢ سم ، أحسب مساحة القطاع الدائرى $\overset{\frown}{م أ ب}$ الأصغر .

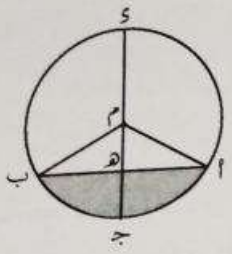
٧ قطاع دائرى محيطه ٦٤ سم وطول نصف قطر دائرته ٢١ سم ، أوجد باستخدام الحاسبة قياس زاويته المركزية بالدرجات ومساحة سطحه .

٨ قطاع دائرى مساحة سطحه ٤٨ سم^{٢} وطول قوسه ١٦ سم ، أوجد محيط القطاع وقياس زاويته المركزية بالتقديرين الستينى والدائرى .

٩ أ نقطة خارج دائرة مركزها م رسم المماس $\overline{أب}$ يمسها فى ب بحيث كان أب = ١٣,٢ سم وصلت $\overline{أم}$ فقطعت محيط الدائرة فى ء وكان ق(ب أ م) = ١٣ ٣١° أوجد المساحة المحصورة بين القوس الأصغر $\overset{\frown}{ب ء}$ والقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$.

• تعريف : القطعة الدائرية

هو جزء من سطح دائرة محدودة بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس .



فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{ءجـ} \perp \overline{أب}$ ، فإن أ جـ ب قطعة دائرية ، أ م̂ ب هى زاوية القطعة ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر ، $\overline{هجـ}$ ارتفاع القطعة الدائرية .

تذكر أن :
مساحة سطح المثلث = نصف حاصل ضرب طولى أى ضلعين فيه × جيب الزاوية بينهما

قانون مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ ق^{٢} (θ° − حا θ)

حيث هـ هى الزاوية المركزية (زاوية القطعة) ، θ° القياس الدائرى لزاوية القطعة .

• مثال (٤) :

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٠٠°

الحل

$\because \frac{س°}{١٨٠} = \frac{θ^{ء}}{ط}$ ∴ $θ^{ء} = \frac{ط \times ١٠٠°}{١٨٠°} = ١,٧٤٥^{ء}$ ، حا θ = حا ١٠٠° = ٠,٩٨٤٨

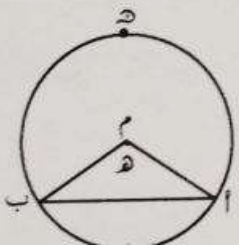
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ ق^{٢} (θ° − حا θ)

= $\frac{١}{٢} \times ٢٥ (١,٧٤٥ - ٠,٩٨٤٨) = ٩,٥$ سم^{٢}

• مثال (٥) :

دائرة م طول قطرها ١٦ سم ، أ ، ب نقطتان على الدائرة فإن كان طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$ يساوى ١٢ سم ، أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة القطعة الكبرى التى وترها $\overline{أب}$.

الحل



$\because θ^{ء} = \frac{ل}{ق} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}^{ء}$

∴ $س° = θ^{ء} \times \frac{١٨٠}{ط} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١٨٠}{ط}$

= ٨٥° ٥٦′ ٣٧″

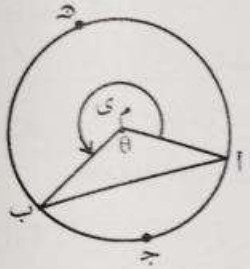
∴ حا θ = ٠,٩٩٧٥

∴ مساحة القطعة الدائرية أ ج ب = $\frac{1}{2}$ ق^{2} (θ^{c} − حا θ)

= $\frac{1}{2}$ × ٦٤ ($\frac{3}{2}$ − ٠,٩٩٧٥) = ١٦,٠٨ سم^{2}

∴ مساحة القطعة الكبرى أ د ب = مساحة الدائرة − مساحة القطعة أ ج ب

= ط × ٦٤ − ١٦,٠٨ = ١٨٤,٩٨٢ سم^{2}



حل آخر : θ^{c} = $\frac{ل}{ق}$ = $\frac{١٢}{٨}$ = $\frac{3}{2}$^{c}

ى^{c} = ٢ط − ١,٥^{c} = ٤,٧٨٣١٩^{c}

ى^{c} = ٢٧٤° ٣′ ∴ حا ى^{c} = −٠,٩٩٧٥

∴ مساحة القطعة الكبرى أ د ب = $\frac{1}{2}$ ق^{2}(ى^{c} − حا ى)

= $\frac{1}{2}$ × ٦٤ (٤,٧٨٣١٩ + ٠,٩٩٧٥) = ١٨٤,٩٨٢ سم^{2}

مثال (٦) :

دائرتان متساويتان طول نصف قطر كل منها ٤ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى ، أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما .

الحـــل

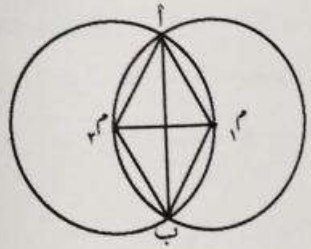
المثلث أ م$_{1}$ م$_{2}$ متساوى الأضلاع حيث أ م$_{1}$ = أ م$_{2}$ = م$_{1}$ م$_{2}$

∴ ق(∠ أ م$_{1}$ ب) = ١٢٠° ، ق(∠ أ م$_{2}$ ب) = ١٢٠°

∵ أنصاف الأقطار متساوية ∴ مساحة كلا من القطعتين الدائرتين متساويتين

θ^{c} = $\frac{ط}{١٨٠}$ × ١٢٠° = $\frac{2}{3}$ط

= $(\frac{2}{3}ط)^{c}$



حا هـ = حا ١٢٠° = ٠,٨٦٦

مساحة القطعة أ م$_{1}$ ب = $\frac{1}{2}$ ق^{2} (θ^{c} − حا هـ)

= $\frac{1}{2}$ × ١٦ ($\frac{2}{3}$ط − ٠,٨٦٦) = ٩,٨٣ سم^{2}

مساحة القطعتين = ١٩,٦٦ سم^{2} = مساحة المنطقة المشتركة بينهما .

تمرين (٦) : على القطعة الدائرية (من امتحانات الأزهر)

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° مقربًا الجواب لأقرب سم^{2} .

٢ أوجد لأقرب سم^{2} مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وزاويتها ٢,٣^{c} .

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى طول نصف قطر دائرتها ١٦ سم وطول قوسها ٢٤ سم مقربًا الجواب لأقرب رقم عشرى .

٤ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى نصف قطر دائرتها ١٠ سم وارتفاعها ٥ سم .

٥ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٠ سم ، رسم الوتر $\overline{أ ب}$ فى الدائرة بحيث كان بعده عن مركز الدائرة يساوى ٥ سم ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$.

٦ Δ أ ب ج متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم ، أوجد مساحة القطعة التى قوسها $\overset{\frown}{ب ج}$ لأقرب سم^{2} .

٧ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ج ∈ الدائرة م وكان أ ج = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم ، أوجد مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{أ ج}$.

٨ دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم ، أ ، ب نقطتان على الدائرة تحصران قوس أصغر طوله ٢١ سم ، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{أ ب}$.

٩ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٨ سم والبعد بين مركزيهما ١٠ سم ، أوجد المساحة المشتركة بين الدائرتين لأقرب سم^{2} .

درس ٦

المساحات

• **مساحة المثلث** = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• **مثال (١) :** أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم
و(∠ب) = ٦٣° ، مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢٢ × ١٦ حا ٦٣° ≃ ١٥٦,٨١٧ سم^{2}

• **مساحة الشكل الرباعى بدلالة قطريه :**

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

• **مثال (٢) :** أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٤٦ سم
وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° لأقرب سم^{2} .

الحل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ × ٣٢ × ٤٦ حا ١٢٢° ≃ ٦٢٤ سم^{2}

• **مساحة المضلع المنتظم :**

مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^{2} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

• **مثال (٣) :** أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم
مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة الشكل الخماسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^{2} × ظتا $\frac{\pi}{5}$

= $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^{2} × $\frac{1}{\text{ظ}٣٦°}$ ≃ ٤٤٠,٤٤٢ سم^{2}

• **ملحوظة :** الشكل المنتظم يسمى مسدس ، مسبع ، مثمن ليدل على أنه منتظم .
بدلاً من قولنا الشكل الخماسى المنتظم نسمى ذلك (مُخمس) .

تمرين (٧) : على المساحات

١ أوجد مساحة المثلث س ص ع حيث س ص = ١٨ سم ، ص ع = ١٢ سم ،
و(∠ص) = ٣٨° مقربًا لأقرب رقمين عشريين .

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فيه : ب جـ = ٢٥ سم ، أ جـ = ١٩ سم ،
و(∠جـ) = ٥٦° لأقرب سم^{2}

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث أ ب = ٢٠ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ،
و(∠ب) = ١١٠° لأقرب سم^{2} .

٤ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٥ سم ، ١٨ سم ، وقياس
الزاوية المحصورة بينهما ٧٧° لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٠ سم ، ٢١ سم ، وقياس
الزاوية المحصورة بينهما ٥٥° لأقرب سم^{2} .

٦ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٤٠ سم ، ٣٥ سم ، وقياس
الزاوية المحصورة بينهما ١٢٥° لأقرب سم^{2}

٧ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٣٢ سم ، ٢٨ سم ، وقياس
الزاوية المحصورة بينهما ١١٠° لأقرب سم^{2}

٨ أوجد مساحة المسدس الذى طول ضلعه ١٥ سم (مسدس ≡ شكل سداسى منتظم)

٩ أوجد مساحة المسبع الذى طول ضلعه ٢٤ سم .

١٠ أوجد مساحة المثمن الذى طول ضلعه ١٢ سم .

١١ أوجد مساحة المعين الذى طول ضلعه ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين
ضلعين متجاورين فيه تساوى ٥٨° .

١٢ مسدس مساحته ٥٤ $\sqrt{٣}$ م^{2} ، أوجد طول ضلعه .

١٣ شبه منحرف متساوى الساقين قاعدته الكبرى ٨ م ، وقاعدته الصغرى ٣ م ، ويميل
على من ساقين على القاعدة الكبرى بزاوية ٧٥° ، أوجد مساحة شبه المنحرف .

ثالثًا

الهندسة التحليلية

درس ١

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

• **تعاريف أساسية :**

(١) **الكميات القياسية :** هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها فقط ، مثل الطول والحجم والمساحة .

(٢) **الكميات المتجهة :** هى كميات تتحدد تمامًا بمعرفة مقدارها واتجاهها ، مثل السرعة والقوة .

• **الفرق بين الإزاحة والمسافة :**

(١) **الإزاحة :** كمية قياسية وهى المسافة المقطوعة للجسم فعليًا .

(٢) **الإزاحة :** كمية متجهة وهى المسافة المقطوعة فى اتجاه معين بين نقطة البداية ونقطة النهاية فقط .

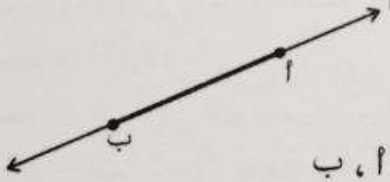
• **مثال لتوضيح ذلك :** كما بالشكل المقابل

إذا تحرك جسم من أ ثم ذهب إلى جـ ثم رجع إلى ب

فإن المسافة المقطوعة = أ جـ + جـ ب = ١٠ + ٤ = ١٤ سم

الإزاحة يهمنا البداية والنهاية فقط = أ ب = ٦ سم

(٣) القطعة المستقيمة :



هى مجموعة جزئية من نقط الخط المستقيم ،

فمثلاً $\overline{أ ب}$ هى المجموعة التى عناصرها النقطتين أ ، ب

وكل نقط الخط المستقيم المحصورة بين أ ، ب ، نلاحظ أن : $\overline{أ ب} = \overline{ب أ}$

(٤) القطعة المستقيمة الموجهة : إذا حددنا نقطة البداية والنهاية للقطعة المستقيمة تسمى القطعة المستقيمة الموجهة ورمزها $\overrightarrow{أ ب}$ أ، $\overrightarrow{ب أ}$

إذًا : القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد تمامًا بثلاثة عناصر هى

(١) نقطة البداية . (٢) نقطة النهاية . (٣) الاتجاه من نقطة البداية لنقطة النهاية .

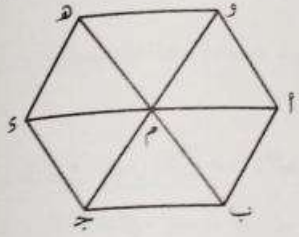
لذا فإن $\overrightarrow{أ ب} \neq \overrightarrow{ب أ}$ وتقرأ $\overrightarrow{أ ب}$ لا تكافئ $\overrightarrow{ب أ}$

• **تعريف القطعة المستقيمة الموجهة :** ..... نهاية واتجاه .

(٥) معيار القطعة المستقيمة الموجهة : معيار $\overrightarrow{أب}$ هو طول $\overline{أب}$
ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{أب}\|$

• ملحوظة : $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{ب أ}\| = أب$

(٦) تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين : تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه .



• مثال (١) : فى الشكل المقابل :
أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه النقطة (م) ،
اذكر ما يكافئ $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{مء}$ ، $\overrightarrow{جء}$

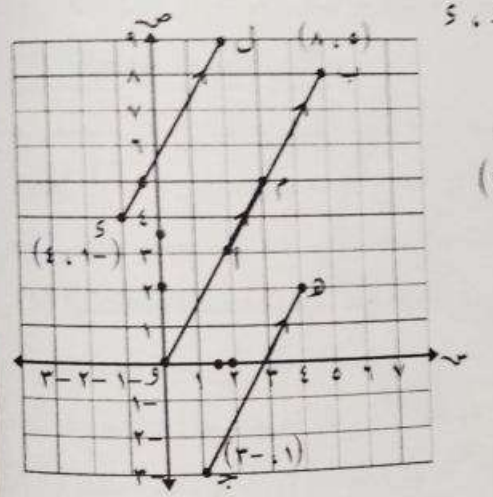
الحل

(١) $\overrightarrow{بأ}$ تكافئ كل من $\overrightarrow{جم}$ ، $\overrightarrow{مو}$ ، $\overrightarrow{ءهـ}$

(٢) $\overrightarrow{مء} = \overrightarrow{أم} = \overrightarrow{وهـ} = \overrightarrow{بجـ}$ (٣) $\overrightarrow{جء} = \overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مهـ} = \overrightarrow{أو}$

• مثال (٢) : فى مستوى إحداثى عين النقط أ(٢ ، ٣) ، ب(٥ ، ٨) ، جـ(١ ، -٣) ، ء(-١ ، ٤) ثم ارسم $\overrightarrow{جهـ}$ ، $\overrightarrow{ءل}$ ، $\overrightarrow{وم}$ ، حيث (و) نقطة الأصل ، كل ذلك يكافئ $\overrightarrow{أب}$ مع إيجاد إحداثى كل من النقط م ، هـ ، ل

الحل



الخطوة الأولى : تحديد النقط أ ، ب ، جـ ، ء

الخطوة الثانية :

نوجد ما يلى وهو قانون سيدرس فيما بعد .

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٨ ، ٥) - (٢ ، ٣)$

$= (٥ ، ٣)$

نلاحظ أن :

الإحداثى السينى الناتج = ٣

الإحداثى الصادى الناتج = ٥

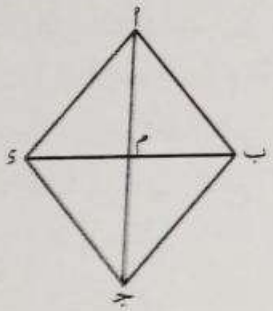
من عند نقطة (جـ) نسير ٣ خطوات

فى اتجاه محور السينات الموجبة ثم نسير ٥ خطوات فى اتجاه محور الصادات الموجبة

نجد نقطة هـ = (٤ ، ٢) بالمثل ل = (٩ ، ٦) ، $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) هى نفسها $\overrightarrow{أب}$
تأكيدًا للحل كل القطع لها نفس الاتجاه ونفس الطول .

تمرين (١) :
الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

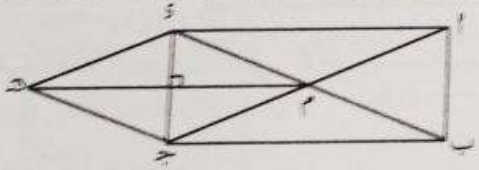
١ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء معين فيه :
[أ] $\overrightarrow{أب}$ يكافئ .....
[ب] $\overrightarrow{بجـ}$ يكافئ .....
[جـ] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ .....
[ء] $\overrightarrow{أم}$ يكافئ .....

٢ أ ب جـ ء مربع تقاطع قطراه فى (م) اكتب جميع القطع المستقيمة الموجهة والمتكافئة التى يعينها الشكل .

٣ فى الشكل المقابل :

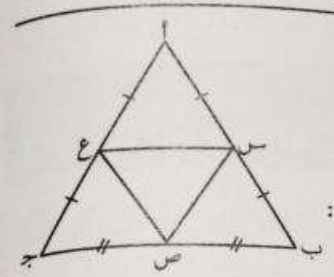


أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م
ورسم $\overline{مه} \perp \overline{ءجـ}$ ، $مه = أء$ ،
أكمل ما يأتى : [أ] الشكل أ م ه ء متوازى أضلاع لأن .....
[ب] الشكل م ب جـ ه متوازى أضلاع لأن .....
[جـ] الشكل م جـ ه ء متوازى أضلاع لأن .....
[ء] $\overrightarrow{مه}$ يكافئ ..... ، .....
[هـ] $\overrightarrow{ءه}$ يكافئ ..... ، ..... [و] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ ..... ، .....

٤ فى مستوى إحداثى متعامد عين النقط أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٥) ، جـ = (٢ ، ٣) ، ء = (-٣ ، -١) ثم عين $\overrightarrow{جهـ}$ ، $\overrightarrow{ءل}$ التى تكافئ $\overrightarrow{أب}$ مع إيجاد إحداثيى النقطتين هـ ، ل

٥ فى مستوى إحداثى متعامد عين النقط أ(٤ ، -٣) ، ب(٤ ، ٤) ، جـ(-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جء}$ ، $\overrightarrow{وم}$ ، $\overrightarrow{هو}$ متكافئة

حيث (و) نقطة الأصل ، أوجد إحداثيات كل من ى ، م ، هـ



٦ فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ

س ، ص ، ع منصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـ أ}$

على الترتيب ، أولاً : أى العبارات التالية صحيحة :

[ا] $\|\overrightarrow{سص}\| = \|\overrightarrow{عجـ}\|$ [جـ] $\overrightarrow{بص}$ تكافئ $\overrightarrow{عس}$

[ب] $\overrightarrow{سص}$ تكافئ $\overrightarrow{عص}$

ثانيًا : اكتب القطع التى تكافئ ما يلى إن وجدت :

[ا] $\overrightarrow{بس}$ [ب] $\overrightarrow{اع}$ [جـ] $\overrightarrow{سع}$

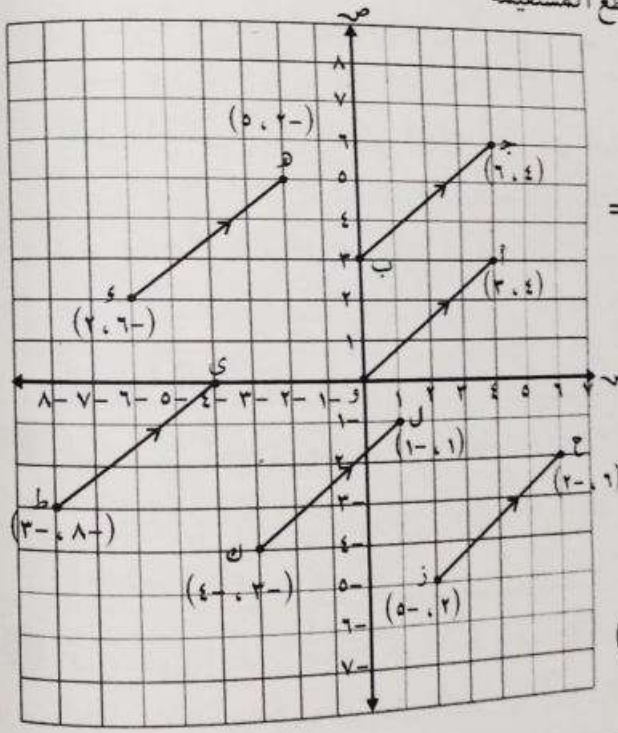
[ء] $\overrightarrow{جص}$ [هـ] $\overrightarrow{سص}$ [و] $\overrightarrow{عص}$

درس ٢ مفهوم المتجه هندسيًا وجبريًا

فى الشكل المقابل : كل القطع المستقيمة متوازية ولها نفس الطول .

∴ القطع مستقيمة موجهة متكافئة

وهى $\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{طى} = \overrightarrow{كل} = \overrightarrow{زح}$



• ملحوظة (١) :

على تلك القطع :

$\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و}$

$= (٣ ، ٤) - (٠ ، ٠)$

$= (٣ ، ٤)$

$\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٦ ، ٤) - (٣ ، ٠)$

$= (٣ ، ٤)$

$\overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{هـ} - \overrightarrow{ء} = (-٢ ، ٥) - (-٦ ، ٢) = (٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{طى} = \overrightarrow{ى} - \overrightarrow{ط} = (-٤ ، ٠) - (-٨ ، -٣) = (٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{كل} = \overrightarrow{ل} - \overrightarrow{ك} = (١ ، -١) - (-٣ ، -٤) = (٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{زح} = \overrightarrow{ح} - \overrightarrow{ز} = (٦ ، -٢) - (٢ ، -٥) = (٤ ، ٣)$

• ملحوظة (٢) : يمكن إنشاء عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة المذكورة فى الشكل السابق ، وأحسن طريقة لإنشاء تلك القطع المتكافئة ، نأتى من اى نقطة نسير ٤ خطوات فى اتجاه محور السينات الموجب ثم ٣ خطوات فى اتجاه محور الصادات الموجب .

• ملحوظة (٣) : القطعة المستقيمة الموجهة الخارجة من نقطة الأصل لها اسم يخصها هو (**متجه الموضع**) وهو $\overrightarrow{وأ}$ فى هذه المجموعة .

• تعريف متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل : هى القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة .

• تعريف المتجه هندسيًا :

هذا التعريف من معد كتاب المرشد حتى يتضح المفهوم .

مجموعة لا نهائية من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة التى لها متجه موضع ، ونقطة نهاية متجه الموضع هو الذى يمثل هذه المجموعة فى المستوى الإحداثى .

من هذا التعريف يتضح أن كل متجه يمثل بنقطة وحيدة فى المستوى الإحداثى .

حتى نعرّف مفهوم المتجه جبريًا ، وهو المذكور فى كتاب الوزارة .

• تمهيد (١) : ∵ ح × ح = {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

، ح × ح هى ح^{٢} وتقرأ ح^{٢} اثنان

• تعريف (١) : لكل (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ∈ ح^{٢} ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ∈ ح^{٢} يعرف مجموعهما

(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) = (س$_{١}$ + س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ + ص$_{٢}$) ∈ ح^{٢}

• تعريف (٢) : لكل (س ، ص) ∈ ح^{٢} ولكل ك ∈ ح*

يعرّف ك(س ، ص) = (كس ، كص) ∈ ح^{٢}

∴ بسبب التقابل بين نقط المستوى وهى المجموعة ح^{٢} ونقط متجهات الموضع تم بناء نظام رياضى لتعريف المتجه جبريًا .

• **تعريف المتجه جبريًا :** عناصر المجموعة ح^{٢} مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها تسمى متجهات .

من التعريف كل نقطة فى المستوى الإحداثى المتعامد تمثل متجه .

• **تنبيهات :** (١) $\overrightarrow{أب} \subset \overleftrightarrow{أب}$

(٢) عندما نقول $\overrightarrow{س ص} = \overrightarrow{ع ل}$ يعنى س ص = ع ل ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$

(٣) نسمى كل القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة بالمتجه وأى من هذه القطع يعتبر تمثيل هندسى لهذا المتجه .

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

ولهما نفس الاتجاه ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -٢\overrightarrow{ب} \Leftarrow \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

واتجاههما مضاد ، وطول $\overrightarrow{أ}$ ضعف طول $\overrightarrow{ب}$

• **خواص عمليتى الضرب والجمع :**

تتحقق فى عملية الجمع الخواص التالية : (أ) خاصية الانغلاق . (ب) الإبدال

(جـ) التجميع أو الدمج . (ء) خاصية وجود العناصر المحايد وهو و = (٠ ، ٠)

(هـ) خاصية توافر المعكوسات . (و) خاصية الحذف .

ويتحقق فى عملية ضرب متجه فى عدد حقيقى : الخواص التالية :

(أ) **خاصية التوزيع :** إذا كان أ ، ب ∈ ح^{٢} ، ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ ∈ ح

فإن : (١) ك$_{١}$ ($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) = ك$_{١}$ أ + ك$_{١}$ ب

(٢) (ك$_{١}$ + ك$_{٢}$) $\overrightarrow{أ}$ = ك$_{١}$ $\overrightarrow{أ}$ + ك$_{٢}$ $\overrightarrow{ب}$

(ب) **خاصية التجميع :** لكل أ ∈ ح^{٢} ، لكل ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ ∈ ح

يكون (ك$_{١}$ ك$_{٢}$) $\overrightarrow{أ}$ = ك$_{١}$ (ك$_{٢}$ $\overrightarrow{أ}$)

(جـ) **خاصية الحذف :** إذا كان : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ والعكس صحيح .

• **مفهوم التساوى :** إذا كان $\overrightarrow{م}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)

إذا كان : س$_{١}$ = س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ ، فإن $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{هـ}$ والعكس صحيح

• **مثال (١) :** إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ١) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (-١ ، ٧)

أوجد : أولاً : ٥ $\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{جـ}$ ، ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{جـ}$

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

أولاً : ٥ $\overrightarrow{أ}$ = ٥(٣ ، ٥) = (١٥ ، ٢٥) ، $-\overrightarrow{ب}$ = -(-٢ ، ١) = (٢ ، -١)

، $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{جـ} = \frac{٢}{٣}$(-١ ، ٧) = ($-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٤}{٣}$)

٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{جـ}$ = ٢(٣ ، ٥) + ٣(-٢ ، ١) - (-١ ، ٧)

= (٦ ، ١٠) + (-٦ ، ٣) + (-١ ، -٧) = (٦ ، ١)

ثانيًا : بفرض أن م ، هـ ∈ ح وبفرض أن $\overrightarrow{جـ}$ = م $\overrightarrow{أ}$ + هـ $\overrightarrow{ب}$

∴ (-١ ، ٧) = م(٣ ، ٥) + هـ(-٢ ، ١)

= (٣م ، ٥م) + (-٢هـ ، هـ) = (٣م - ٢هـ ، ٥م + هـ)

∴ -١ = ٣م - ٢هـ ..... (١) ، ٧ = ٥م + هـ ..... (٢)

∴ هـ = ٧ - ٥م عوض فى (١) ∴ -١ = ٣م - ٢(٧ - ٥م)

∴ -١ = ٣م - ١٤ + ١٠م ∴ ١٣ = ١٣م ∴ م = ١

، عوض فى (١) ∴ هـ = ٢ ∴ $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$

• **قانون :** ما هو الارتباط بين متجه الموضع $\overrightarrow{جـ}$ الذى له نهاية تمثل المتجه وأى قطعة مستقيمة موجهة لها بداية ونهاية ، ولتكن $\overrightarrow{أب}$ متكافئة مع متجه الموضع $\overrightarrow{جـ}$.

القانون : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{جـ}$

ملحوظة : هذا القانون موجود فى كتاب الوزارة بعد درسين .

وأيضًا إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ ء}$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{جـ}$

• **تعريف معيار المتجه :** هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه .

فإذا كان : $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص) فإن $\|\overrightarrow{ر}\| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

• **ملحوظة هامة :** المقياس يتعامل مع الأعداد الحقيقية لكن المعيار يتعامل مع المتجهات .

• **مثال (٢) :** إذا كان : أ = (٣ ، -٢) ، ب = (٦ ، ٢) ، جـ = (١ ، ٣) ، ء = (٤ ، ٧)

أولاً : أثبت أن $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{جـ ء}$ ثانيًا : أوجد $\|\overrightarrow{أب}\|$

الحل

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ٢) - (٣ ، -٢) = (٣ ، ٤)

، $\overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{جـ}$ = (٤ ، ٧) - (١ ، ٣) = (٣ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ ء}$

∴ $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{جـ ء}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

• **مثال (٢) :** فى المستوى الإحداثى المتعامد أ(٣ ، -٢) ، ب(٦ ، ٢) ، جـ(١ ، ٣) ، ء(٤ ، ٧) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أم} = \overrightarrow{ءهـ}$

أوجد إحداثيى كل من م ، هـ

الحـل

$\because \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أم} \Leftarrow \therefore \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{أ}$

$\Leftarrow \therefore (١ ، ٣) - (٢ ، ٦) = \overrightarrow{م} - (٣ ، -٢)$

$\therefore \overrightarrow{م} = (١ ، ٣) - (٢ ، ٦) + (٣ ، -٢) = (-٢ ، -١)$

$\because \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{ءهـ} \quad \therefore \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{هـ} \Leftarrow \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{ب}$

$\therefore \overrightarrow{هـ} = (٤ ، ٧) - (١ ، ٣) + (٢ ، ٦) = (٩ ، ٦)$

تمرين (٢) : على مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

١ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٠ ، ١١)$

اكتب كلاً مما يأتى :

أولاً : $٢\overrightarrow{ب}$ ، $٣\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$ ، $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٢ إذا كانت $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-٦ ، ١٤)$ ، أوجد :

أولاً : $٢\overrightarrow{أ}$ ، $-\overrightarrow{ب}$ ، $\frac{١}{٢}\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ}$

ثانيًا : عبر عن $\overrightarrow{جـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٣ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٦ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٣)$

أوجد : $\|\overrightarrow{أب}\|$ ، $\|\overrightarrow{ب}\|$ ، $\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ ، $\|٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}\|$

٤ إذا كان أ = (٢ ، -٣) ، ب = (١ ، ٣) أوجد متجه الموضع المكافئ لـ $\overrightarrow{أب}$

٥ إذا كان أ = (٨ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٥) ، وكان $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وجـ}$

أوجد إحداثيى (جـ)

٦ أوجد متجه الموضع المكافئ لـ وَل حيث $\overrightarrow{وَ} = (٢ ، -٣)$ ، ل = (٣ ، ٥)

٧ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-١ ، ٠)$

أوجد $\|٢\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}\|$

٨ أب جـ ء شكل رباعى فيه : أ = (-١ ، -٢) ، ب = (٧ ، ٠) ، جـ = (٨ ، ٤) ، ء = (٠ ، ٢) أثبت أن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ءجـ}$

٩ أب جـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (٨ ، ٤) ، ب = (٥ ، ٦) ، جـ = (-١ ، ٥)

أوجد إحداثيى نقطة (ء)

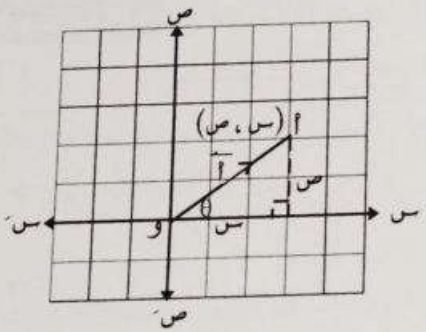
١٠ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٢)$ فأوجد $\|\overrightarrow{أب}\|$

١١ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٥ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٤ ، -٢)$

أوجد $\|٢\overrightarrow{بجـ} - \overrightarrow{أب}\|$

درس ٣ الصور المختلفة للمتجه

• الصورة القطبية لمتجه الموضع :



θ هى الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{وأ}$ ، وس الاتجاه الموجب لمحور السينات .

نوجد ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثم نوجد $\|\overrightarrow{وأ}\|$

$\therefore \overrightarrow{وأ} = (\text{س} ، \text{ص}) = (\|\overrightarrow{وأ}\| ، \theta)$

وهى الصورة القطبية لمتجه الموضع .

• نلاحظ أن : س = $\|\overrightarrow{وأ}\|$ حتا θ ، ص = $\|\overrightarrow{وأ}\|$ حا θ

• **مثال (١) :** إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٨ ، ٨\sqrt{٣})$ أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الحـل

$\because \|\overrightarrow{أ}\|$ = طول $\overrightarrow{وأ} = \sqrt{(٨)^٢ + (٨\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{١٩٢ + ٦٤} = \sqrt{٢٥٦}$

= ١٦ وحدة طول

$\because$ ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٨}{٨\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore$ ق(θ) = ظا$^{-١}(\frac{١}{\sqrt{٣}}) = ٣٠^\circ = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore \overrightarrow{أ}$ فى الصورة القطبية = $(١٦ ، \frac{\pi}{٦})$

• **متجه الوحدة :** هو متجه معياره الوحدة .

التعبير عن المتجه بدلالة متجهة الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$

• **تعريف :** (١) **متجه الوحدة الأساسى** $\overleftarrow{س}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $\overleftarrow{س} = (١ ، ٠)$.

(٢) **متجه الوحدة الأساسى** $\overleftarrow{ص}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات حيث $\overleftarrow{ص} = (٠ ، ١)$.

$$\therefore \overleftarrow{أ} = (س ، ص) = س\overleftarrow{س} + ص\overleftarrow{ص}$$

• **مثال (٢) :** عبر عن المتجهات بدلالة الوحدة الأساسيين :

[أ] $\overleftarrow{م} = (٢ ، ٧)$ [ب] $\overleftarrow{ل} = (-٥ ، ٠)$ [جـ] $\overleftarrow{ع} = (٠ ، ٨)$

الحل

[أ] $\overleftarrow{م} = ٢\overleftarrow{س} + ٧\overleftarrow{ص}$ [ب] $\overleftarrow{ل} = -٥\overleftarrow{س}$ [جـ] $\overleftarrow{ع} = ٨\overleftarrow{ص}$

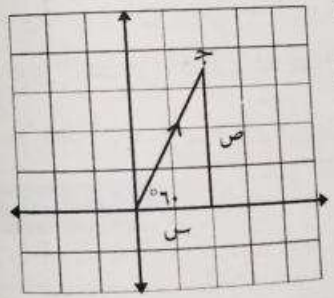
• **مثال (٣) :** أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من :

[أ] السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٣٠ كم كل ساعة فى اتجاه الغرب .

[ب] المسافة المقطوعة فى اتجاه الجنوب ٨٠ كم .

[جـ] قوة مقدارها ٦٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه ٦٠° فى شمال الشرق .

الحل



[أ] بفرض متجه الموضع ب : $\therefore \overleftarrow{ب} = -٣٠\overleftarrow{س}$

[ب] بفرض متجه الموضع أ : $\therefore \overleftarrow{أ} = -٨٠\overleftarrow{ص}$

[جـ] لاحظ أن متجه الموضع $\overleftarrow{جـ}$

$\overleftarrow{جـ} = (٦٠ ، ٦٠°)$ الصورة القطبية .

$\therefore$ س = ٦٠ جتا ٦٠°

، ص = ٦٠ جا ٦٠°

س = ٦٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ ، ص = ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣٠$\sqrt{٣}$

$\therefore \overleftarrow{جـ} = (٦٠ ، ٦٠°) = (٣٠ ، ٣٠\sqrt{٣}) = ٣٠\overleftarrow{س} + ٣٠\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

تمرين (٣) : على الصورة المختلفة للمتجه

١ إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٤ ، ٣٠)$ ، أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overleftarrow{أ}$

٢ إذا كان $\overleftarrow{جـ} = (١٢ ، \frac{\pi ٣}{٤})$ ، أوجد إحداثيى نقطة (جـ)

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره

٣ $\overleftarrow{أ} = (-٣ ، ٤)$ ٤ $\overleftarrow{ب} = (٥ ، -١٢)$

٥ $\overleftarrow{ل} = (-٣ ، -٦)$ ٦ $\overleftarrow{ع} = (-٧ ، ٠)$

٧ $\overleftarrow{ف} = (٤ ، ٠)$

أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات التالية :

٨ $\overleftarrow{م} = ٣\sqrt{٣}\overleftarrow{س} + ٣\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

٩ $\overleftarrow{ه} = ٥\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$

١٠ $\overleftarrow{ك} = ٣\overleftarrow{س} + ٣\sqrt{٣}\overleftarrow{ص}$

١١ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٠ ، ١١)$

اكتب كلاً من المتجهات التالية بدلالة متجهة الوحدة الأساسيين :

$٢\overleftarrow{ب}$ ، $٣\overleftarrow{جـ}$ ، $(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{جـ})$ ، $\frac{١}{٢}(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ})$

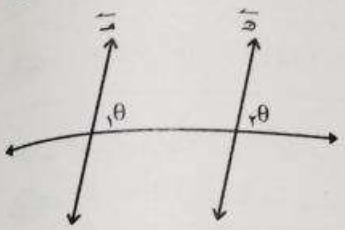
أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

١٢ سرعة منتظم ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب .

١٣ قوة مقدارها ٥٠ ث.كجم فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق .

١٤ إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى .

درس ٤ توازى متجهين وتعامدهما



إذا كان : $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ه}$ متجهين غير صفريين

حيث $\overleftarrow{م} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overleftarrow{ه} = (س_2 ، ص_2)$

(١) إذا كان : $\overleftarrow{م} \parallel \overleftarrow{ه}$

فإن $ظا\theta_1 = ظا\theta_2$ يعنى $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

ويكون : $س_1 ص_2 = س_2 ص_1$

$\therefore س_1 ص_2 - س_2 ص_1 = ٠$ والعكس صحيح

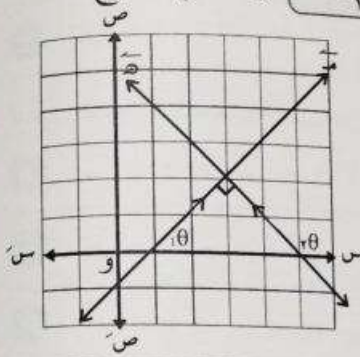
(٢) إذا كان : $\overleftarrow{م} \perp \overleftarrow{ه}$

$\therefore ظا\theta_1 \times ظا\theta_2 = -١$

$\therefore \frac{ص_1}{س_1} \times \frac{ص_2}{س_2} = -١$

$\therefore س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = ٠$

والعكس صحيح .



• مثال (١) : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (-٤ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٦ ، -٩)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٢)$

أثبت أن : $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ب} \perp \overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ} \perp \overleftarrow{أ}$

الحل

أولاً : الطرف الأيمن لشرط التوازى = $س_1 ص_2 - س_2 ص_1$

$= -٤ \times -٩ - ٦ \times ٦ = ٣٦ - ٣٦ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$

ثانيًا : الطرف الأيمن لشرط التعامد = $س_1 س_2 + ص_1 ص_2$

$= ٦ \times ٣ + -٩ \times ٢ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{ب} \perp \overleftarrow{جـ}$

ثالثًا : لإثبات أن $\overleftarrow{جـ} \perp \overleftarrow{أ}$

$\therefore س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = -٤ \times ٣ + ٦ \times ٢ =$ صفر = الأيسر

$\therefore \overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{جـ}$

• مثال (٢) : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٥)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ك ، ٢)$ أوجد ك عندما :

(١) $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ (٢) $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

الحل

(١) عندما $\overleftarrow{أ} \parallel \overleftarrow{ب}$ $\therefore س_1 ص_2 - س_2 ص_1 = ٠$ $\Leftarrow$ $٣ \times ٢ - ك \times -٥ = ٠$

$\therefore ٥ك = -٦$ $\therefore ك = \frac{-٦}{٥}$

(٢) عندما $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ $\therefore س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = ٠$ $\Leftarrow$ $٣ \times ك + ٢ \times -٥ = ٠$

$\therefore ٣ك = ١٠$ $\therefore ك = \frac{١٠}{٣}$

تمرين (٤) : على توازى متجهين وتعامدهما

١ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{س} - ٥\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = -٦\overleftarrow{س} + ١٠\overleftarrow{ص}$ متوازيان .

٢ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (٤ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٨ ، ٤)$ متوازيان .

٣ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٣ ، ٢)$ متوازيان .

٤ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = (-١٠ ، ٢٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٦ ، -٨)$ غير متوازيين .

٥ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٦ ، ٣)$ متعامدان .

٦ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{ب} = -٦\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٤ ، ٨)$ متعامدان .

٧ بيِّن أن المتجهين $\overleftarrow{ب} = (-٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٢ ، -٢)$ غير متعامدين .

٨ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ١)$

بيِّن أن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}$ متوازيان .

٩ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (-٥ ، -٢)$

بيِّن أن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}$ متعامدان .

١٠ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ٢)$ بين أن $٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب}$ ،

والمتجه $\overleftarrow{جـ} = (-١١ ، -١٠)$ متوازيان .

١١ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (\frac{-٧}{٥} ، ٢)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٣ ، ٦)$

فأثبت أن : $(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب})$ يوازى $(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ})$

أوجد العدد (ك) إذا كان ذلك ممكنا بحيث تتحقق الشروط المعطاة :

١٠ $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ك)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -١)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين .

١١ $\overrightarrow{أ} = (ك ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ك ، ٨)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين .

١٢ $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ك ، ٢)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين .

١٣ $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ك)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين .

١٤ $\overrightarrow{أ} = (-ك ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ك)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين .

١٥ $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ك)$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين .

١٦ $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -١)$ ، ب = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{جـ} = (ك ، ١٥)$

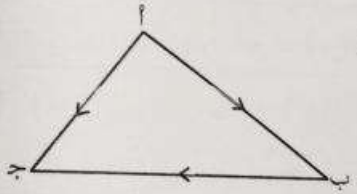
أثبت أن : $\overrightarrow{جـ}$ ، $(\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ})$ متوازيان

١٧ بيّن أن $\overrightarrow{أ} = (٦ ، ٣٠°)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ١٢٠°)$ متعامدان .

١٨ بيّن أن $\overrightarrow{أ} = (٤ ، ٣٠°)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٦ ، ٣٠°)$ متوازيان.

درس ٥ العمليات على المتجهات

• **قاعدة المثلث لجمع متجهين (علاقة شال) :**



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أجـ}$

• **ملحوظة (١) :** $\because \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore \overrightarrow{أب}$ هى المعكوس الجمعى لـ $\overrightarrow{بأ}$

أى أن : $\overrightarrow{بأ} = -\overrightarrow{أب}$

ملحوظة : لحفظ القانون كما لو كنا حذفنا ب مع ب يتبقى $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أجـ}$

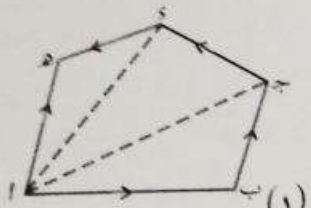
• **مثال (١) :** فى أى مثلث أب جـ ، أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب} \overrightarrow{جـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{٠}$

الحل

$\because \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ⇐ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{٠}$

$\because \overrightarrow{أجـ} = -\overrightarrow{جـأ}$ ⇐ $\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{٠}$

• **مثال (١) :** فى الشكل المقابل :



أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{أهـ}$

الحل

العمل : صل $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$

فى Δ أب جـ : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ..... (١)

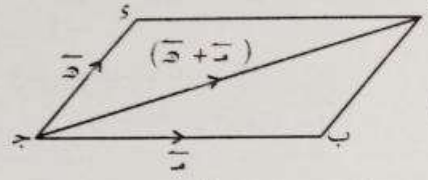
فى Δ أجـ د : $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{أد}$ من (١)

$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{أد}$ ..... (٢)

فى Δ أهـ د : $\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{أهـ}$ من (٢)

$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{أهـ}$ (المطلوب)

• **قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين :**



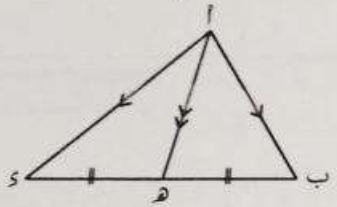
$\because \overrightarrow{مـ} + \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{جـب} + \overrightarrow{جـد}$

$\because \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{بأ}$ $\therefore \overrightarrow{جـب} + \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{جـأ}$

لاحظ أن : $\overrightarrow{جـأ}$ قطر

• **نتائج :** (١) $\overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{جـب} = \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{جـب} + \overrightarrow{جـد}$

$\therefore \overrightarrow{مـ} + \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{هـ} + \overrightarrow{مـ}$



(٢) فى Δ أب د : إذا كانت هـ منتصف $\overline{ب د}$

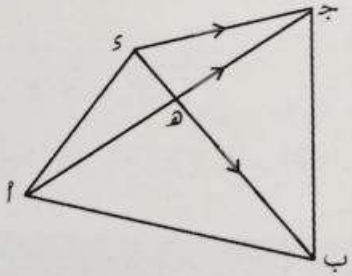
$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = ٢\overrightarrow{أهـ}$

• **مثال (٢) :** فى أى شكل رباعى أب جـ د ، أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{دب}$

الحل

يوجد عدد كبير من الحلول لهذه المسائل

فالحل ليس وحيد



فى Δ أجـ د : $\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ..... (١)

فى Δ د ب أ : $\overrightarrow{دأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دب}$ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} + \overrightarrow{دأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{دب}$ ..... (١)

$\because \overrightarrow{أد} = -\overrightarrow{دأ}$ $\therefore$ تحذف $\overrightarrow{أد}$ مع $\overrightarrow{دأ}$ من (٢)

$\therefore \overrightarrow{دجـ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{دب}$

حل آخر : بفرض أن $\overrightarrow{أجـ} \cap \overrightarrow{بء} = \{هـ\}$

فى Δ هـ جـ ء : $\because \overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـجـ} = \overrightarrow{ءجـ}$ ..... (١)

فى Δ هـ ب أ : $\because \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـبـ} = \overrightarrow{أبـ}$ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـجـ} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـبـ} = \overrightarrow{ءجـ} + \overrightarrow{أبـ}$

$\because \overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـبـ} = \overrightarrow{ءبـ}$ ، $\overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـجـ} = \overrightarrow{أجـ}$

$\therefore$ الطرف الأيمن يصبح : $\overrightarrow{ءجـ} + \overrightarrow{أبـ} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ءبـ}$

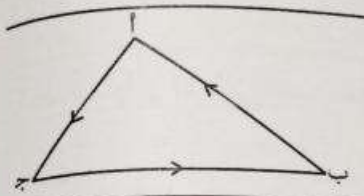
حل آخر : فى كتاب الوزارة ص٧٣ .

• قاعدة طرح المتجهات هندسيًا :

$\overrightarrow{أبـ} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جبـ}$

وهى مرتبطة بالقاعدة :

$\overrightarrow{أبـ} = \overrightarrow{بـ} - \overrightarrow{أ}$



ملحوظة : لحفظ القانون كما لو كنا حذفنا ب مع ب يتبقى $\overrightarrow{بـ} - \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{جبـ}$

• مثال (٤) : إذا كان : $٣\overrightarrow{ءـ} - ٢\overrightarrow{أبـ} = ٣\overrightarrow{جبـ} + ٥\overrightarrow{بأ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{ءـ} = \overrightarrow{جأ}$

الحـل

$٣\overrightarrow{ءـ} - ٢(\overrightarrow{بـ} - \overrightarrow{أ}) = ٣(\overrightarrow{بـ} - \overrightarrow{جـ}) + ٥(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{بـ})$

$٣\overrightarrow{ءـ} - ٢\overrightarrow{بـ} + ٢\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{بـ} - ٣\overrightarrow{جـ} + ٥\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{بـ}$

$٣\overrightarrow{ءـ} = ٣\overrightarrow{بـ} - ٣\overrightarrow{جـ} + ٥\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{بـ} + ٢\overrightarrow{بـ} - ٢\overrightarrow{أ}$

$= ٣\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{جـ} = ٣(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{جـ}) = ٣\overrightarrow{جأ}$

$\therefore ٣\overrightarrow{ءـ} = ٣\overrightarrow{جأ}$ $\therefore \overrightarrow{ءـ} = \overrightarrow{جأ}$

يوجد حل آخر فى كتاب الوزارة ص٧٥

تمرين (٥) : على العمليات على المتجهات

١ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أء}$ ، أثبت أن :

أولاً : أ ب جـ ء شبه منحرف . ثانيًا : $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = ٤\overrightarrow{أء}$

٢ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه (هـ) منتصف $\overrightarrow{بجـ}$ ، أثبت أن :

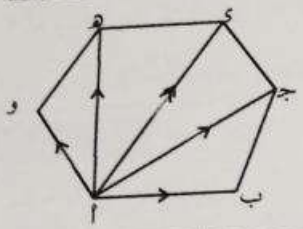
$\overrightarrow{أبـ} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ} = ٢\overrightarrow{أهـ}$

٣ **فى الشكل المقابل :**

أ ب جـ ء هـ و مسدس

أثبت أن :

$\overrightarrow{أبـ} + \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{أو} = ٢\overrightarrow{أء}$



٤ فى أى مضلع رؤوسه النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، أثبت أن :

$\overrightarrow{أبـ} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جء} + \overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـأ} = \overrightarrow{٠}$

٥ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $٢\overrightarrow{بجـ} = ٥\overrightarrow{أء}$ ، أثبت أن :

أولاً : $٢\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{بء} = ٧\overrightarrow{أء}$ ثانيًا : $٢\overrightarrow{أبـ} - ٢\overrightarrow{ءجـ} = ٣\overrightarrow{ءأ}$

٦ فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء ، أثبت أن : $\overrightarrow{ءبـ} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{ءأ} - \overrightarrow{بجـ}$

٧ إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، فأثبت أن :

أولاً : $٢\overrightarrow{أم} = \overrightarrow{أبـ} + \overrightarrow{أء}$ حيث م نقطة تقاطع قطريه .

ثانيًا : $\overrightarrow{هـء} + \overrightarrow{هـبـ} = \overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{هـجـ}$ حيث هـ أى نقطة فى المستوى .

٨ أ ب جـ مثلث ، ء نقطة تقع على $\overrightarrow{بجـ}$ بحيث $٢\overrightarrow{بء} = ٣\overrightarrow{ءجـ}$

أثبت أن : $٥\overrightarrow{أء} = ٢\overrightarrow{أبـ} + ٣\overrightarrow{أجـ}$

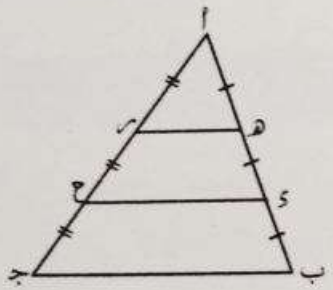
٩ **فى الشكل المقابل :**

أ هـ = هـ ء = ء ب ،

أ ر = ر ح = ح جـ ،

أثبت أن :

$\overrightarrow{بجـ} = ٢\overrightarrow{ءح} + ٢\overrightarrow{هـر}$



درس ٦ تطبيقات على المتجهات

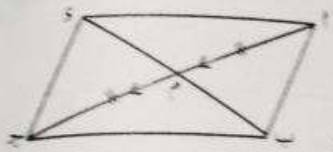
• **نتيجة** إذا كان $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{د جـ}$ يؤدى إلى شبين $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{د جـ}$ ، $أ ب = د جـ$

والعكس صحيح ، إذا كان $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{د جـ}$ ، $أ ب = د جـ$ فإن $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{د جـ}$

• مثال (١) :

باستخدام المتجهات أثبت أن قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

الحل



نعمل : نصل $\overline{أ جـ}$ يأخذ عليه نقطة تنصيف (م)

نصل $\overline{ب م}$ ، $\overline{م د}$

المطلوب : إثبات أن ب ، م ، د على استقامة واحدة

، م منتصف $\overline{ب د}$

البرهان : ∵ (م) منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overrightarrow{أ م} = \overrightarrow{م جـ}$ ($أ م = م جـ$ ، $\overline{أ م} \parallel \overline{م جـ}$)

فى Δ أ ب م : $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ م} = \overrightarrow{ب م}$ ..... (١)

فى Δ جـ م د : $\overrightarrow{م جـ} + \overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{م د}$ ..... (٢)

∴ $\overrightarrow{أ م} = \overrightarrow{م جـ}$ فعلاً

$\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{جـ د}$ لأنهما ضلعان متوازيان ومتساويان فى متوازى الأضلاع .

من (١) ، (٢) ∴ $\overrightarrow{ب م} = \overrightarrow{م د}$ ∴ $\overline{ب م} \parallel \overline{م د}$ ويشتركان فى نقطة واحدة (م)

∴ ب ، م ، د على استقامة واحدة ، وينتج أيضاً أن : ب م = م د

∴ م منتصف $\overline{ب د}$ ∴ القطران $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب د}$ ينصف كل منهما الآخر .

تمرين (١) : على تطبيقات المتجهات

❶ باستخدام المتجهات أثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى الشكل الرباعى كان الشكل متوازى أضلاع .

❷ باستخدام المتجهات أثبت أن القطعة المستقيم المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث .

❸ أ ب جـ د شكل رباعى ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ د}$ ، $\overline{د أ}$ على الترتيب ، باستخدام المتجهات أثبت أن :

أولاً : الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع .

ثانياً : محيط الشكل س ص ع ل يساوى مجموع طول قطرى الشكل الرباعى أ ب جـ د

❹ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د شبه منحرف

$\overline{أ د} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $أ د = \frac{1}{2} ب جـ$

، $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{هـ}$ ، $\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{و}$

أولاً : عبر بدلالة $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{هـ}$ عن كل من $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{د جـ}$ ، $\overrightarrow{د ب}$

ثانياً : إذا كانت س ∈ $\overline{أ جـ}$ حيث أ س = $\frac{1}{3}$ أ جـ

أثبت أن النقط د ، س ، ب على استقامة واحدة .

درس ٧ (نشاط) تطبيقات فيزيائية لا يتعين به الطالب

• أولاً : القوة المحصلة :

مقدمة : إذا أثرت قوى على جسم كما بالشكل لإيجاد محصلة هذين القوتين .

نأخذ متجه وحدة $\overrightarrow{ى}$ وليكن فى اتجاه الشرق ∴ $\overrightarrow{ق_١} = ٥٠ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٣٠ \overrightarrow{ى}$

∴ المحصلة = $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = ٥٠ \overrightarrow{ى} + (-٣٠ \overrightarrow{ى}) = ٢٠ \overrightarrow{ى}$

• مثال (٢) : فى الشكل المقابل :

أثرت على جسم قوة فى اتجاه الشرق ٨٠ نيوتن ، وكانت قوة الاحتكاك فى الاتجاه المضاد مقدارها ١٠ نيوتن ، أوجد محصلة القوتين .

الحل

نأخذ متجه وحدة $\overrightarrow{ى}$ فى أى اتجاه وليكن فى اتجاه الشرق

∴ $\overrightarrow{ق_١} = ٨٠ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -١٠ \overrightarrow{ى}$

∴ المحصلة ($\overrightarrow{ح}$) = $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = ٨٠ \overrightarrow{ى} + (-١٠ \overrightarrow{ى}) = ٧٠ \overrightarrow{ى}$

• مثال (٣) : تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = 2\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية ، أوجد المحصلة مقداراً واتجاهًا (القوى مقاسة بالنيوتن)

الحل

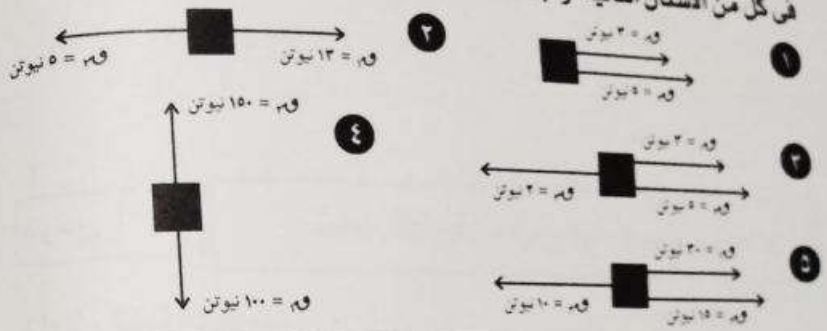
$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = 2\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} = 3\overrightarrow{س} + 4\overrightarrow{ص} = (3 ، 4)$

مقدار المحصلة = $\|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{16+9} = 5$ نيوتن

∵ ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{4}{3}$ ∴ ق(θ) ظا$^{-1}(\frac{4}{3}) = 53^\circ 7' 48''$

تمرين (٧) : على تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

فى كل من الأشكال التالية أوجد المحصلة :



٦ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = 3\overrightarrow{س} + 7\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = 2\overrightarrow{س} + 5\overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية
أوجد مقدار واتجاه المحصلة علمًا بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٧ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = 2\overrightarrow{س} + 4\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = 3\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$
فى نقطة مادية ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة علمًا بأن القوى مقاسة بـ ث.كجم .

٨ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = 3\overrightarrow{س} + 4\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -2\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = 2\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$
فى نقطة مادية ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة علمًا بأن القوى مقاسة بالنيوتن .

٩ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = 2\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = 5\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$
فى نقطة مادية ، أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت المحصلة
[أ] $\overrightarrow{ح} = 5\overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص}$ [ب] $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{٠}$
ما معنى أن محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overrightarrow{٠}$

• ثانيًا : السرعة النسبية

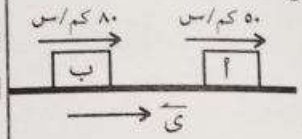
السرعة النسبية لجسم (ب) بالنسبة إلى جسم (أ) آخر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ع_{ب أ}}$
هى السرعة التى يبدو الجسم (ب) متحركًا بها للجسم (أ)
فإذا كان $\overrightarrow{ع_أ}$ سرعة السيارة أ الفعلية ، $\overrightarrow{ع_ب}$ سرعة السيارة ب الفعلية

فإن : $\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$ أيضًا $\overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب}$

• مثال (١) : تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٥٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٨٠ كم/س ، أوجد سرعة (أ) بالنسبة إلى (ب) عندما :
أولاً : تتحرك السيارتان فى اتجاه واحد . ثانيًا : تتحرك السيارتان فى اتجاهين متضادين .

الحل

أولاً : تتحركان فى اتجاه واحد :



باعتبار $\overrightarrow{ى}$ فى اتجاه السيارتين

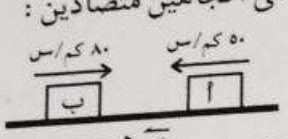
∴ $\overrightarrow{ع_أ} = ٦٠\ \overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\ \overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = ٥٠\ \overrightarrow{ى} - ٨٠\ \overrightarrow{ى}$

$= -٣٠\ \overrightarrow{ى}$

ثانيًا : تتحركان فى اتجاهين متضادين :



باعتبار $\overrightarrow{ى}$ فى اتجاه السيارة ب

∴ $\overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\ \overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ع_أ} = -٥٠\ \overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_{أب}} = \overrightarrow{ع_أ} - \overrightarrow{ع_ب} = -٥٠\ \overrightarrow{ى} - ٨٠\ \overrightarrow{ى}$

$= -١٣٠\ \overrightarrow{ى}$

تمرين (٨) : على (السرعة النسبية)

١ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٣٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٧٠ كم/س ، أوجد سرعة (ب) بالنسبة إلى (أ) عندما تتحرك السيارتان فى : أولاً : اتجاه واحد . ثانيًا : اتجاهين متضادين .

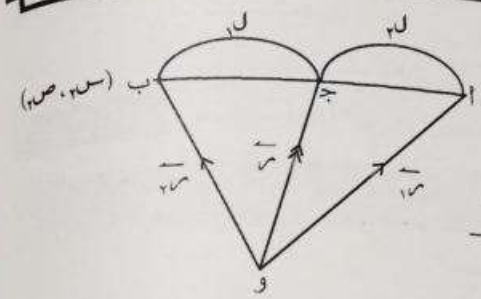
٢ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س وتحركت دراجة بخارية على نفس الطريق بسرعة ٤٠ كم/س ، أوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما يتحرك فى : أولاً : اتجاه واحد . ثانيًا : اتجاهين متضادين .

٣ تتحرك سيارة أ تراقب السرعة على الطريق بسرعة ٣٠ كم/س ، راقبت سيارة (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد ، فبدت كأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س .
فما هى السرعة الفعلية للسيارة الثانية (ب) ؟

الوحدة الخامسة : الخط المستقيم

تقسيم قطعة مستقيمة

درس ١



(١) التقسيم من الداخل :

جـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

بنسبة : ل٢ : ل١

∴ القانون : $\overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

تسمى الصيغة المتجهة

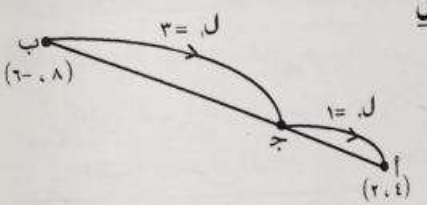
ومنها (س ، ص) = $\left(\frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢} \right)$

وتسمى الصيغة الإحداثية :

$س = \frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢}$ ، $ص = \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}$

• مثال (١) : إذا كانت أ(٤ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٦) أوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

الحل



$\overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore \overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{٣ \times (٤ ، ٢) + ١ \times (٨ ، -٦)}{٣ + ١}$

$\therefore \overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{(٢٠ ، ٠)}{٤} = (٥ ، ٠)$

∴ إحداثيا نقطة جـ هى (٥ ، ٠)

(٢) التقسيم من الخارج :

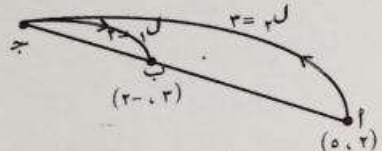
• مثال (٢) : إذا كانت أ(٢ ، ٥) ، ب = (٣ ، −٢) أوجد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

الحل

$\overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{ل_٢ \overrightarrow{ر_٢} - ل_١ \overrightarrow{ر_١}}{ل_٢ - ل_١}$

$\therefore \overrightarrow{ر_{جـ}} = \frac{٣ (٣ ، -٢) - ٢ (٢ ، ٥)}{٣ - ٢}$

$\therefore \overrightarrow{ر_{جـ}} = (٥ ، -١٦)$



• نتائج :

(١) إذا كانت جـ(س ، ص) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ فإن :

$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

(٢) نقطة تلاقى المتوسطات : م = $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right)$

ثالثا : إيجاد نسبة التقسيم إذا كانت جـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ل٢ : ل١

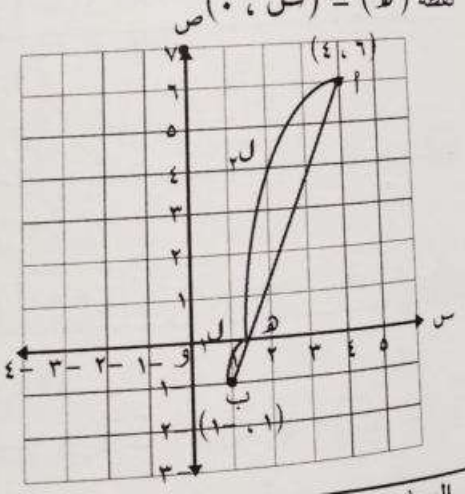
وكان (١) نسبة التقسيم : $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ كان التقسيم من الداخل .

(٢) نسبة التقسيم : $\frac{ل_٢}{ل_١} < ٠$ كان التقسيم من الخارج .

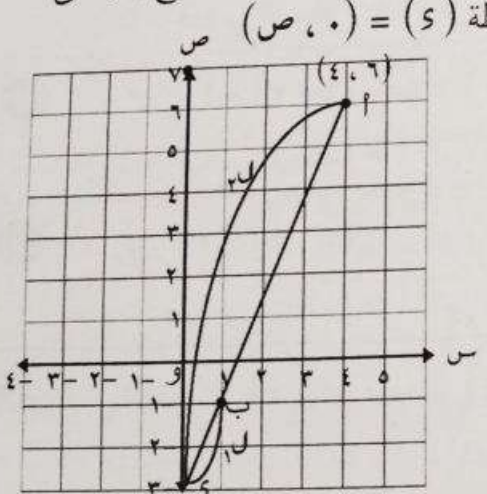
• مثال (٣) : إذا كانت أ = (٦ ، ٤) ، ب = (١ ، −١) ، أوجد النسبة التى تقسم $\overline{أب}$ بمحور السينات ومحور الصادات مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة ثم أوجد إحداثى نقطة التقسيم فى كل حالة .

الحل

بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ فى نقطة (هـ) = (س ، ٠)



بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ فى نقطة (ى) = (٠ ، ص)



$\therefore$ ص $= \frac{ل_2 ص_1 + ل_1 ص_2}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ صفر $= \frac{ل_1 \times ٤ + ل_2 \times -١}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ل_1 = ل_2$

$\therefore \frac{ل_1}{ل_2} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٤}{١} > ٠$

وهى أكبر من الصفر

$\therefore$ التقسيم من الداخل

بنسبة $ل_1 : ل_2 = ٤ : ١$

إحداثى نقطة هـ :

حيث س $= \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$= \frac{١ \times ٤ + ٦ \times ١}{١ + ٤} = ٢$

$\therefore$ هـ $= (٢ ، ٠)$

ى $= (٠ ، ص)$

$\therefore$ س $= \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore$ صفر $= \frac{ل_1 \times ٦ + ل_2 \times ١}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٦ ل_1 = -ل_2$

$\therefore \frac{ل_2}{ل_1} = \frac{-٦}{١} < ٠$

$\therefore$ التقسيم من الخارج بنسبة ٦ : ١

، إحداثيا النقطة ى هما $(٠ ، ص)$

$\therefore$ ص $= \frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}$

$= \frac{٦ \times -١ - ١ \times ٤}{١ - ٦} = \frac{-١٠}{٥}$

$= -٢$

$\therefore$ ى $= (٠ ، -٢)$

تمرين (١) : على تقسيم قطعة مستقيمة

أولا : التقسيم من الداخل :

١ إذا كان : أ $= (-١ ، ٧)$ ، ب $= (٢ ، ٥)$

أوجد إحداثى النقطة (جـ) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

٢ إذا كان : أ $= (٢ ، ٥)$ ، ب $= (-٥ ، ٢)$

أوجد إحداثى النقطة (جـ) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

٣ إذا كان : أ $= (٥ ، ٢)$ ، ب $= (-١ ، -١)$

أوجد إحداثى النقطة (جـ) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

٤ إذا كان : أ $= (٤ ، ٢)$ ، ب $= (-٥ ، -١)$

أوجد إحداثيات النقطة (جـ) إذا كان جـ $\in \overline{أب}$ ، ٥ أجـ $= ٣ أب$

٥ أوجد إحداثيات النقطة (جـ) التى تقع عند ربع المسافة بين :

أ $= (-١ ، ١)$ إلى ب $= (٧ ، ٥)$

ثانيا : التقسيم من الخارج :

٦ أوجد إحداثى النقطة ى حيث ى $\in \overline{بأ}$ ، ى $\notin \overline{أب}$ ، ى أ : ى ب $= ١ : ٣$

وكانت أ $= (٣ ، ٤)$ ، ب $= (-٥ ، ٢)$

٧ إذا كانت أ $= (-٧ ، ٢)$ ، ب $= (٢ ، ٥)$ أوجد النقطة (جـ) حيث جـ $\in \overline{بأ}$

، جـ $\notin \overline{ب أ}$ والتى بعدها عن ب يساوى ثلاثة أمثال بعدها عن أ .

ثالثا : مسائل التقسيم من الداخل والخارج :

٨ إذا كانت أ $= (٣ ، -٢)$ ، ب $= (-٢ ، ٤)$ أوجد النسبة التى تقسم بها

جـ$(٨ ، -٨)$ القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ مبينًا نوع التقسيم .

٩ أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بكل من نقطتي تقاطعهما مع محورى الإحداثيات

إذا كان أ $= (٣ ، -٢)$ ، ب $= (-٢ ، ٥)$ مع إيجاد تلك النقط .

١٠ إذا كان أ $= (٥ ، ٢)$ ، ب $= (-٣ ، ١)$ أوجد النسبة التى ينقسم بها $\overline{أب}$

بمحور السينات ثم بمحور الصادات على الترتيب مع إيجاد نقط تقاطعهما مع المحورين .

١١ إذا كانت : أ $= (٢ ، ٤)$ ، ب $= (٣ ، ٦)$ ، جـ $= (٥ ، ١٠)$ على استقامة واحدة

أوجد :

أولاً : النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{بجـ}$ مبينًا نوع التقسيم .

ثانيًا : النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{جـ أ}$ مبينًا نوع التقسيم .

ثالثًا : النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ مبينًا نوع التقسيم .

١٢ إذا كانت أ $= (-٤ ، ٢)$ ، ب $= (١ ، -٢)$ ، جـ $= (١ ، ٦)$

أوجد نقطة تلاقى المتوسطات المثلث أ ب جـ

١٣ إذا كانت أ $= (٣ ، ٤)$ ، ب $= (-٥ ، ٢)$ إذا كانت النقطة جـ $(٧ ، ص)$

تقسم $\overline{أ ب}$ ، أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة

الموجهة $\overrightarrow{أب}$ مبينًا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة (ص) .

درس ٢ مراجعة على معادلة الخط المستقيم

(١) أ س + ب ص + جـ = ٠ تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

(٢) إذا كان : س = أ فهى معادلة مستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ٠)

(٣) إذا كان : ص = ب فهى معادلة مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ب)

(٤) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : $(س_١ ، ص_١) ، (س_٢ ، ص_٢)$

ميل الخط المستقيم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ظا هـ

حيث هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ميل الخط المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ هى م = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$ = $\frac{-أ}{ب}$

(٥) إذا كان : $م_١ = م_٢$ فإن المستقيمين متوازيان .

وإذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن المستقيمين متعامدان .

(٦) صورة معادلة المستقيم بدلالة الميل (م) والجزء المقطوع (جـ) من محور الصادات .

ص = م س + جـ

• مثال (١) : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (٨ ، ٢)

وقياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب .

الحل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٥}{٨ - ٣} = \frac{-٣}{٥}$

∴ ظا هـ = $\frac{-٣}{٥}$ ∴ ق(هـ) = ١٤٩° ٢٠ ٢

• مثال (٢) : أوجد ميل الخط المستقيم : ٥س - ٤ص + ٣ = ٠ بطريقتين

ثم أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات .

الحل

∴ ميل المستقيم = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$

ثانيًا : ∵ ٤ص = ٥س + ٣ بالقسمة على ٤ ∴ ص = $\frac{٥}{٤}$س + $\frac{٣}{٤}$

∴ الميل = $\frac{٥}{٤}$ والجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٣}{٤}$

• مثال (٣) : أوجد نقاط تقاطع المستقيم التالى مع محورى الإحداثيات :

٢س - ٥ص + ٣ = ٠

الحل

ضع س = ٠ ∴ -٥ص = ٣ ∴ ص = $\frac{-٣}{٥}$

∴ نقطة التقاطع مع محورى الصادات (٠ ، $\frac{-٣}{٥}$)

ضع ص = ٠ ∴ ٢ص = -٣ ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$

∴ نقطة التقاطع مع محورى السينات ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

• مثال (٤) : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٣ ويمر بالنقطة (٤ ، ٥)

الحل

ص = م س + جـ ∴ ص = ٣س + جـ ∵ (٤ ، ٥) تمر بالمستقيم

∴ تحققه ∴ ٥ = ٣ × ٤ + جـ ∴ جـ = -٧

∴ معادلة المستقيم : ص = ٣س - ٧

• مثال (٥) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٣)

الحل

ميل المستقيم = $\frac{٤ - ٣}{٣ - ٥} = \frac{-١}{٢}$ ∴ معادلة المستقيم : ص = م س + جـ

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$س + جـ ∵ (٣ ، ٤) تقع على المستقيم ∴ تحققه

∴ ٤ = $-\frac{١}{٢} \times ٣$ + جـ ∴ جـ = $\frac{١١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم : ص = $-\frac{١}{٢}$س + $\frac{١١}{٢}$

تمرين (٢) : على معادلة الخط المستقيم

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج :

[أ] (٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٥) [ب] (٤ ، ٠) ، (٢ ، -١)

[جـ] (٧ ، -١) ، (٣ ، -٣) [د] (-٥ ، -٣) ، (-١ ، ٣)

❷ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم ص = أس + ٥ يوازى المستقيم ص = ٢س − ٣

❸ أوجد قيمة أ إذا كان المستقيم : ص = أس − ٣ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٤)

❹ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا مقداره ٧ وحدات وميله = ٤

❺ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءًا سالبًا مقداره ٣ وحدات ويصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

❻ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٦) ، وميله = ٤

❼ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٥) ، (٥ ، −٣)

❽ أوجد ميل المستقيمات التالية بطريقتين :

[أ] ٢س − ٣ص + ٨ = ٠ [ب] ٥ص + ٤س − ٢ = ٠

[جـ] ص = ٨س [د] ص = ٥ [هـ] س = ٦

❾ إذا كان المستقيم : أس − ٤ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥ ، أوجد قيمة أ

درس ٣ معادلة الخط المستقيم المتجهة

• مقدمة :

مما سبق عرفنا أن معادلة الخط المستقيم تتكون بمعرفة نقطة وميل أو نقطتين على المستقيم ، وهذا يرجع إلى المسلمات التالية :

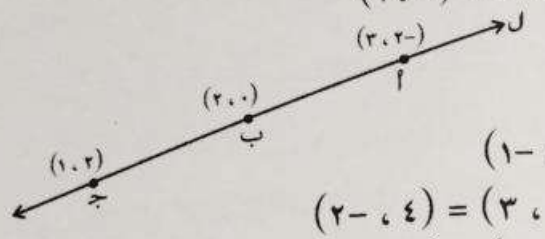
(١) إذا كان أ ، ب نقطتين مختلفتين فى المستوى فإنه يوجد خط مستقيم وحيد مار بهما .

(٢) إذا كان ل خطًا مستقيمًا ، هـ نقطة فى المستوى لا تنتمى إلى (ل)
فإنه يوجد خط وحيد يمر بالنقطة ويوازى الخط المستقيم (ل) .

تعريف متجه اتجاه مستقيم : هو كل متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على الخط المستقيم أو يوازيه .

فمثلاً : إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ هو المستقيم المار بالنقطتين أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، جـ = (٢ ، ١)

حيث أ = (−٢ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، جـ = (٢ ، ١)



لاحظ أن :

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

= (٠ ، ٢) − (−٢ ، ٣) = (٢ ، −١)

$\overrightarrow{أجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ١) − (−٢ ، ٣) = (٤ ، −٢)

$\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) − (٠ ، ٢) = (٢ ، −١)

لاحظ أن : $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم لكن النتائج ترجع إلى القاعدة التالية :

إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه للمستقيم فإن ك $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث ك ≠ ٠

فمثلاً : إذا كان متجه اتجاه مستقيم = (٢ ، −٣) فإن كل النقط التالية متجه اتجاه لنفس هذا المستقيم (−٢ ، ٣) ، (٦ ، −٩) ، (٤ ، −٦) . . . . .

• الصيغة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم :

المار بالنقطة هـ والمتجه $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه للمستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{هـ}$ + ك $\overrightarrow{ى}$

• مثال (١) : اكتب المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بالنقطة (٥ ، −١) ومتجه اتجاه له (٢ ، ٣)

الحل

∵ $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{هـ}$ + ك $\overrightarrow{ى}$ ∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، −١) + ك(٢ ، ٣)

ثانيًا : المعادلات الوسيطية البارامترية :

∵ $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{هـ}$ + ك $\overrightarrow{ى}$

∵ $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ، $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب)

∴ (س ، ص) = (س$_١$ ، ص$_١$) + ك(أ ، ب) بالمقارنة

س = س$_١$ + ك أ ، ص = ص$_١$ + ك ب

يسميان المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم .

ثالثا : المعادلة الكارتيزية : من المعادلتان الوسيطيتان بحذف (ك) منهما

$\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$

$\therefore \frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ب}{أ}$ وبوضع $م = \frac{ب}{أ}$ حيث م ميل المستقيم .

$\therefore \frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$ هى بداية الصورة الكارتيزية .

ومنها نصل إلى الصورة العامة ويطلق أحيانًا على (الصورة العامة) الصورة الكارتيزية .

• **استنتاج هام :** إذا كان $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه المستقيم .

فإن : $\frac{ب}{أ} = م$ = ميل المستقيم .

• مثال (٢) : أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، ٢) والمتجهة $\overrightarrow{ى} = (٤ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم

الحـل

المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك \overrightarrow{ى}$ $\therefore \overrightarrow{ر} = (-٢ ، ٢) + ك(٤ ، ١)$

$\therefore س = -٢ + ٤ك$ ، $ص = ٢ + ك$

المعادلتان الوسيطيتان .

حذف ك منهما $\therefore \frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٢}{١}$

$\therefore \frac{ص - ٢}{س + ٢} = \frac{١}{٤}$ بداية المعادلة الكارتيزية $\therefore ٤ص - ٨ = س + ٢$

$\therefore س - ٤ص + ١٠ = ٠$ تسمى الصورة العامة وأحيانًا الكارتيزية .

• مثال (٣) : أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين :

$و = (٣ ، ٢)$ ، $ه = (٤ ، -١)$

الحـل

اتجاه المستقيم $\overrightarrow{وه} = \overrightarrow{ه} - \overrightarrow{و} = (٤ ، -١) - (٣ ، ٢) = (٢ ، -٤)$

$\overrightarrow{ى} = (٢ ، -٤)$

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك \overrightarrow{ى}$ أ. $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ه} + ك \overrightarrow{ى}$

المعادلة المتجهة $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ٢) + ك(٢ ، -٤)$

$\therefore س = ٣ + ٢ك$ ، $ص = ٢ - ٤ك$ المعادلتان الوسيطيتان

$\therefore \frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ٢}{-٤}$ $\therefore -٤س + ٨ = ٢ص - ٦$ $\therefore ٢ص + ٤س - ١٤ = ٠$

$\therefore ص + ٢س - ٧ = ٠$ الصورة الكارتيزية أو الصورة العامة .

ملحوظة : يمكن إيجاد $\overrightarrow{وه} = (-٢ ، ٤)$ وهى أيضًا متجه اتجاه

١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) ومتجه اتجاه له (٢ ، -١)

٢ أوجد المعادلة الكارتيزية الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٤) ويصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٣ أوجد الصور المختلفة لمعادلة كل من المستقيمات التى تمر بالنقطتين :

[أ] (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤) [ب] (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

[جـ] (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) [ء] (١ ، ١) ، (١ ، -٢)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{أب}$ متجه اتجاه حيث أ = (١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٤) فى الصورة العامة .

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{أب}$ متجه اتجاه حيث أ = (٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ١) فى الصورة العامة .

٦ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٦) ويوازى محور السينات.

٧ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (٤ ، ٢)

٨ أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٢ ، -١)

٩ أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) ويوازى المستقيم $س + ٢ص - ٧ = ٠$

١٠ أوجد معادلة المستقيم فى الصورة العامة المار بالنقطة (٢ ، -٣) وميله م = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) أوجد قيمة أ ، ب

١١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة $و = (١ ، -١)$ والموازى للخط المستقيم : $س = ٣ - ٢ك$ ، $ص = -١ + ٣ك$

١٢ أوجد المعادلات المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة (س ، ص) ومتجه الاتجاه له $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$ إذا كان المستقيم : أولاً : يوازى محور الصادات. ثانيًا : يوازى محور السينات . ثالثًا : يمر بنقطة الأصل .

درس ٤ متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

• **مفهوم :** إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم

فإن متجه اتجاه العمودى على المتجه $\overrightarrow{ى}$ ليس وحيداً بل عدد كبير لا نهائى .

وهى العائلة التى على صورة ك(ب ، -أ)

فمثلاً : إذا كان $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، ٨) متجه اتجاه المستقيم

فإن متجه اتجاه العمودى هو (٨ ، -٣) أ، (-٨ ، ٣) أ، (١٦ ، -٦) ، . . . .

• **مثال (١) :** إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ومتجه اتجاه العمودى عليه (٣ ، -١) ، أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم .

الحل

متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٣) تبديل أماكن (٣ ، -١) مع تغيير إشارة إحداهما

∴ $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٤) + ك(١ ، ٣) المعادلة المتجهة

، س = ٣ + ك ، ص = ٤ + ٣ك المعادلتان الوسيطيتان

أو المعادلتان البارامتريتان

، $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص - ٤}{٣}$ ∴ ٣س - ٩ = ص - ٤

∴ ٣س - ص - ٥ = ٠

المعادلة الكارتيزية للمستقيم :

المعادلة التى تقطع جزءين من المحورين صورتها : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

حيث أ ، ب الجزءان المقطوعان من محور السينات والصادات على الترتيب .

• **مثال (٢) :** أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين للمستقيم :

٥س - ٣ص = ١٥

الحل

بالقسمة على ١٥ ∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٥} = ١$

∴ طولا الجزأين المقطوعين من المحورين السينى والصادى على الترتيب ٣ ، -٥

تمرين (٤) : على متجه اتجاه العمودى للمستقيم ومعادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) عموديًا على المتجه (-١ ، ٢)

٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١) وعموديًا على المستقيم : س + ص - ٨ = ٠

٣ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٧) وعمودى على المستقيم :
$\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٠) وعموديًا على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك(٧ ، -٢)

٥ أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب .

٦ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات النقطتين :
(٣ ، ٠) ، (٠ ، -٤)

٧ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات للمستقيمات :

[أ] ٢س - ٥ص - ٩ = ٠ [ب] ٢س - ٥ص - ٨ = ٠

[جـ] ٢س = ص [د] ص = ٣

[هـ] س = ٢

٨ أوجد معادلة المستقيم فى الصورة العامة إذا كان يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزء طوله ٤ وحدات ، ومن محور الصادات السالب جزءًا طوله ٥ وحدات .

درس ٥ قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

إذا كانت ق قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل ، ل' اللذين ميلاهما م ، م'

$$\text{ظا ق} = \left| \frac{م - م'}{1 + م م'} \right| \quad \text{حيث } 1 + م م' \neq 0$$

• مثال (١) : أوجد قياس الزاوية الحادة بين :

$\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك(٣ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ر'} = (٠ ، ٥) + ك(١ ، ٢)$

الحل

متجه اتجاه المستقيم الأول = $(٣ ، -١)$ $\therefore$ م = $\frac{-١}{٣}$ = ميل المستقيم الأول

متجه اتجاه المستقيم الثانى = $(١ ، ٢)$ $\therefore$ م' = $\frac{٢}{١}$ = ميل المستقيم الثانى

$$\therefore \text{ظا ق} = \left| \frac{٢ - \frac{-١}{٣}}{١ + ٢ \times \frac{-١}{٣}} \right| = ٧ \qquad \therefore \text{و}(\text{ق}) = ١١^\circ\ ٥٢'\ ٨١^\circ$$

• مثال (١) : أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم : س - ٢ص + ٣ = ٠

والمستقيم المار بالنقطتين $(٤ ، -١)$ ، $(٢ ، ١)$

الحل

$$م = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$$

ميل المستقيم الثانى = $\frac{١ + ١}{٤ - ٢} = \frac{٢}{-٢} = -١$

$$\therefore \text{ظا ق} = \left| \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + ١- \times \frac{١}{٢}} \right| = ٣ \qquad \therefore \text{و}(\text{ق}) = ٥٤^\circ\ ٣٣'\ ٧١^\circ$$

• ملحوظة هامة : عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين فى إيجاد قياس زاوية
احلة لمثلث يجب تحديد نوع الزاوية (حادة - منفرجة - قائمة) .

تمرين (٥) : على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$\overleftarrow{ر_١} = (٣ ، ٥) + ك(٢ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ر_٢} = (-٣ ، ٨) + ك(٣ ، ٦)$

٢ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٤س + ٥ص - ١٢ = ٠ ، ٢س - ٣ص + ٨ = ٠

٣ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : س - ٢ص + ١ = ٠
والمستقيم الذى ميله = $-\frac{١}{٣}$

٤ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :
٣س + ٤ص - ٣٢ = ٠ ، س - ٤ص - ٥ = ٠

٥ س + ٢ص - ٣ = ٠ ، $\frac{ص + ٣}{س + ٢} = \frac{٢}{٣}$

٦ س + ص + ٥ = ٠ ، محور السينات

٧ ص = ٣س ، ص = -٣س

٨ اب ج فيه أ(٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، ج = (-٢ ، -١) أوجد قياس (أ).

٩ أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ١) ، (-١ ، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات .

١٠ أوجد قياس الزاوية الحادة بين $\overleftarrow{ر} = (٥ ، ٨) + ك(٣ ، ٣)$
والمستقيم : ٢س - ص - ٣ = ٠

١١ إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : س + كص - ٩ = ٠
٣س - ٥ص + ٨ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ ، أوجد قيمة (ك)

١٢ أوجد قيمة (ك) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :
س + كص - ٨ = ٠ والمستقيم $\overleftarrow{ر} = (٣ ، ٠) + ك(١ ، ٢)$ تساوى $\frac{\pi}{٤}$

١٣ إذا كان المثلث أ ب ج قائم الزاوية فى ب حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، ٧)،
ج = (١ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين .

درس ٦ طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

إذا كان (س ، ص) لا تنتمي إلى المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن طول العمود (ل) = $\frac{|أ س + ب ص + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

مثال (١) : أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، −٥) إلى المستقيم : المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (-١ ، ٠) + ك(١٢ ، ٥)$

الحل

$(س ، ص) = (-١ ، ٠) + ك(١٢ ، ٥)$

$س = -١ + ١٢ك$ ، $ص = ٥ك$ الوسيطيتان

$\frac{ص}{٥} = \frac{س + ١}{١٢}$ ∴ $٥س + ٥ = ١٢ص$

المعادلة في الصورة العامة : $٥س - ١٢ص + ٥ = ٠$ الكارتيزية

طول العمود = $\frac{|٥ \times ٢ - ١٢ \times -٥ + ٥|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}} = \frac{٧٥}{١٣}$ وحدة طول

مثال (٢) : أثبت أن المستقيم : $٣س - ٤ص - ٧ = ٠$ ، $٣س - ٤ص + ١١ = ٠$ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

الحل

$م_١ = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٤}$ ∴ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان .

نفرض أن نقطة تقع على المستقيم الأول ولتكن : س = ٠ ، ∴ ص = $\frac{-٧}{٤}$

∴ النقطة $(٠ ، \frac{-٧}{٤})$ تقع على المستقيم الأول بعدها عن المستقيم الثاني

ف = $\frac{|١١ + \frac{٧}{٤} - \times ٤ - \times ٠ \times ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٨}{٥}$ وحدة طول

تمرين (٦) : على طول العمود المرسوم على خط مستقيم من نقطة

أوجد طول الأعمدة من النقط المبينة إلى المستقيمات المقابلة من (١) إلى (٧)

١ من النقطة (−٣ ، ٢) إلى المستقيم : $٣س - ٤ص + ٢ = ٠$

٢ من النقطة (١ ، −٢) والمستقيم : $٤س - ٣ص = ٠$

٣ من النقطة (١ ، ١) والمستقيم : $٥س + ١٢ص - ٦ = ٠$

٤ النقطة (٢ ، ٤) إلى المستقيم س = ٣

٥ النقطة (٣ ، −٤) إلى المستقيم ص = ٣

٦ من (٤ ، −٥) إلى الخط المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك(٤ ، ٣)$

٧ من (٢ ، ٠) إلى الخط المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (٢ ، ٥) + ك(٥ ، ١٢)$

٨ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، −٣) ، (٤ ، ٠)

٩ أوجد طول العمود من النقطة (٠ ، ٠) من الخط المستقيم المار بالنقطة (−٣ ، ٣) وميله $-\frac{٣}{٤}$

١٠ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤ ، −٢) على المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وميله $\frac{٥}{١٢}$

١١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ على الضلع $\overline{ب ج}$ من أضلاع المثلث أب ج حيث أ = (٤ ، ٦) ، ب = (٢ ، ٣) ، جـ = (−٢ ، ٦)

١٢ أثبت أن المستقيمين : $٥س + ١٢ص - ٩ = ٠$ ، $١٠س + ٢٤ص + ٩ = ٠$ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

١٣ أثبت أن المستقيمين : $٣س + ٤ص - ٥ = ٠$ ، $٦س + ٨ص + ١٠ = ٠$ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

١٤ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ى) على الخط المستقيم : $٢س + ص + ٤ = ٠$ يساوى $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول أوجد (ى)

١٥ أب جـ ى شبه منحرف فيه $\overleftarrow{أ ى}$ // $\overleftarrow{ب جـ}$ فإذا كانت أ(٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٣) ، جـ(١ ، ٦) ، ى(٤ ، ص) أوجد قيمة ص ثم أوجد مساحة شبه المنحرف أب جـ ى

درس ٧ المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

إذا كان لدينا مستقيمين : $ل_1 : أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 = ٠$

، $ل_2 : أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 = ٠$

فإن المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هى :

$$(أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1) + ك(أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2) = ٠ \quad \text{حيث } ك \in ح^*$$

مع استخدام الشرط الموجود فى المسألة فى إيجاد قيمة (ك)

• مثال (١) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(٢ ، -١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٧س + ص + ٣ = ٠ ، ٥س - ص - ٣ = ٠

الحل

الطريقة الأولى تعتمد على إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين

حيث : ٧س + ص = -٣

٥س - ص = ٣

بالجمع ———

١٢س = ٠ ∴ س = ٠ ∴ ص = -٣

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، -٣)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٣) ، (٢ ، -١)

نوجد الميل أولاً : $م = \frac{-٣ + ١}{٠ - ٢} = \frac{-٢}{-٢} = ١$

∴ المعادلة الكارتيزية : $\frac{ص - -١}{س - ٢} = ١$ ∴ ص + ١ = س - ٢

∴ **س - ص - ٣ = ٠**

الطريقة الثانية : إيجاد قيمة (ك) حيث المعادلة هى :

٧س + ص + ٣ + ك(٥س - ص - ٣) = ٠ ..... (١)

∵ (٢ ، -١) يمر بالمستقيم ∴ يحققه

∴ ١٤ + -١ + ٣ + ك(٥ × ٢ + ١ - ٣) = ٠ ∴ ٨ك = -١٦ ∴ ك = -٢

∴ ٧س + ص + ٣ - ٢(٥س - ص - ٣) = ٠

∴ ٣ص - ٣س + ٩ = ٠ بالقسمة على (-٣)

∴ **س - ص - ٣ = ٠**

تمرين (٧) : على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

١ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٢) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

س - ٤ص + ٥ = ٠ ، ٧ص + س - ١٧ = ٠

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٣س - ٢ص + ٢٥ = ٠ ، ٢ص + ٥س - ٢٣ = ٠

٣ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣س + ٢ص - ٧ = ٠ ، $\overleftarrow{ن} = (-٢ ، ٠) + ك(٣ ، ٢)$ وبالنقطة (٣ ، ٤)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$\overleftarrow{ن} = ك(-٢ ، ٢)$ ، ٣س - ٢ص = ١٣ ويوازى محور الصادات .

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ص - س - ٢ = ٠ ، ٤ص + ٣س - ٢٤ = ٠ وعمودى على المستقيم الثانى

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ص - ٢س + ١٥ = ٠ ،

٢ص + ٣س - ١٦ = ٠ ويوازى المستقيم : ص - ٣س + ١ = ٠

٧ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ص - س + ٢ = ٠ ،

٢ص + س + ١٠ = ٠ وعمودى على المستقيم : ٤س + ٣ص - ٨ = ٠

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

ص - س - ٢ = ٠ ، ٢ص - ٣س - ٣ = ٠ وميله = $\frac{٢}{٣}$

٩ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ص - س - ١ = ٠ ، ص - ٢س + ١ = ٠ والموازى لمحور السينات .

١٠ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س - ٣ص + ١٣ = ٠

٢ص + س - ٦ = ٠ ويقطع جزأين متساويين من المحورين .

١١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢س + ٣ص - ٢ = ٠ ، ٣س - ص - ١٤ = ٠

والذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات زاوية قياسها ١٣٥°

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية فى الرياضيات

إرشادات تمارين الجبر وحساب المثلثات والهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى

إعداد

سعيد جودة

أولا : حلول الجبر

إرشادات تمارين (١) على مفهوم المصفوفة

(١) س = ٣ ، ع − ١ = ٥ ∴ ع = ٦

ص + ١ = ٨ ∴ ص = ٧

∴ ك = ٤

(٢) ٢س + ١ = ٥ ∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢

٢ص = ٣ ∴ ص = $\frac{٣}{٢}$

∴ ٤ل + ١ = ٣ ∴ ٤ل = ٢

∴ ل = $\frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{ل}{٢}$ = ٨ ∴ ل = ١٦

$\frac{ع}{٣}$ = ٣ ∴ ع = ٩

∴ ب = ٦ ∴ أ + ب = ٨

∴ أ + ٦ = ٨ ∴ أ = ٢

(٤) س = ٤ ، ص = ٢

أ + ب = ٤−

أ − ب = ٨

بالجمع ٢أ = ٤ ∴ أ = ٢

∴ ب = ٦−

(٥) أ = ٣ ، ب = ٤

س + ص = ٦

س − ص = ٤

بالجمع ٢س = ١٠ ∴ س = ٥

∴ ص = ١

(٦) س = ٢ ، س + ص = ٤ ∴ ص = ٢

أ + ٢ب = ١٠

أ − ب = ٥

بالطرح ٣ب = ٥ ∴ ب = $\frac{٥}{٣}$

∴ أ = ٥ + $\frac{٥}{٣}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

(٧) جـ = ٨ ، ك = ١٢أ

٢ب = جـ ، ٤أ = ب

∴ ٢ب = ٨ ∴ ب = ٤

∴ ٤أ = ب ∴ أ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

∴ ك = ٢

(٨) ب = ٢ ، ٣جـ = ٦ ∴ جـ = ٢

∵ أ + ب = ٤ب

∴ أ + ٢ = ٨ ∴ أ = ٦

ب − أ = ١٢أ + ك

٢ − ٦ = ١٢ + ك ∴ ك = ١٦−

(٩) ١٢أ + ١ = ٣ ∴ ١٢أ = ٢

أ = ١ ∵ ٣ب + أ = ١٤−

٣ب = ١٤− − ١ ∴ ب = $\frac{١٥-}{٣}$ = ٥−

∵ ٢ب + جـ = ٠ ∴ جـ = ٢−ب

∴ جـ = ٢− × ٥− = ١٠

∴ ٢جـ + ك = ١٨

٢ × ١٠ + ك = ١٨ ∴ ك = ١٨ − ٢٠

∴ ك = ٢−

(١٠) ١٥أ = ٤٥ ∴ أ = ٩ ، أ + ٢ب = ٤٩

٢ب = ٤٩ − ٩ = ٤٠

∴ ب = ٢٠

٢جـ = ٦ ∴ جـ = ٣

ك + ٥جـ = ٢٠ ⇐ ك + ١٥ = ٢٠

∴ ك = ٥

(١١) $أ_{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ (١٢) $ب_{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(١٣) $جـ_{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

(١٤) $\text{ن}^{-1} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٨ & ٢ \\ ١ & ٩ & ١٠ \end{pmatrix}$

(١٥) $\text{ن}^{-1} = \text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١٦) $\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ & \text{س} \\ ٩ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٩ & ٦ \end{pmatrix} = \text{ب}$

(١٧) $\text{ه}^{-1} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥- & ١- \\ ٥ & ٦ & ٩ \\ ١ & ٩- & ٧ \end{pmatrix}$

(١٨) $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(١٩) $\text{ه}^{-1} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ & ٩ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٨ \end{pmatrix}$

(٢٠) $\text{ص}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$ (٢١) $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢٢) $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٣) $\text{ه}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢٤) $\text{ه}^{-1} = \begin{pmatrix} ١ & ١- & ٤ \\ ١- & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

$\because \text{ه} = \text{ه}^{-1}$ ∴ هى متماثلة

ارشادات تمارين (٢)
على جمع وطرح المصفوفات

(١) أولاً: $\text{أ} + ٣\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٦- & ٣- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٢ & ٥ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

ثانياً: $٢\text{أ} + (-٥\text{ب})$

$= \begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٥- & ٥- \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٩- & ١- \\ ٢٢ & ١٥ \end{pmatrix}$

ثالثاً: $\text{ب} + ٢\text{جـ} + (-\text{أ})$

$= \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣- & ٢- \\ ٦- & ٥- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ١١ \\ ٤- & ٤ \end{pmatrix}$

رابعاً: $\text{أ} + (-٢\text{ب}) + (-٣\text{جـ})$

$= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦- & ٢- \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢- & ١٨- \\ ٦- & ١٥- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٥- & ١٨- \\ ٤ & ٨- \end{pmatrix}$

(٢) أولاً: $٣\text{ه} - ٣\text{ب} = ٢\text{أ}$

$\therefore ٣\text{ه} = ٢\text{أ} + ٣\text{ب}$

$٣\text{ه} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٨ & ٢ \\ ١٦ & ١٠ & ٤ \\ ١٨ & ١٢ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٥ & ٦ & ٣- \\ ١٨ & ٩ & ٦- \\ ٣ & ١٢ & ٢١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٧ & ١٤ & ١١ \\ ٢٢ & ١٩ & ١٠ \\ ٩ & ٢٤ & ٣٩ \end{pmatrix}$

$\text{ه} = \begin{pmatrix} ١٧/٣ & ١٤/٣ & ١١/٣ \\ ٢٢/٣ & ١٩/٣ & ١٠/٣ \\ ٣ & ٨ & ١٣ \end{pmatrix}$

ثانياً: $٣\text{ه}^{-1} = \text{أ} - ٢\text{ب}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠- & ٤- & ٢ \\ ١٢- & ٦- & ٤ \\ ٢- & ٨- & ١٤- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٩- & ٠ & ٩ \\ ١٠- & ١- & ١٢ \\ ١- & ٢- & ٥- \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ه}^{-1} = \begin{pmatrix} ٣- & ٠ & ٣ \\ \frac{١٠-}{٣} & \frac{١-}{٣} & ٤ \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢-}{٣} & \frac{٥-}{٣} \end{pmatrix}$

$\text{ه} = \begin{pmatrix} ٣- & \frac{١٠-}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{١-}{٣} & \frac{٢-}{٣} \\ ٣ & ٤ & \frac{٥-}{٣} \end{pmatrix}$

ثالثاً: $\text{ه} + ٢\text{ه}^{-1} = ٢\text{ب}^{-1}$

$\therefore \text{ه} = ٢\text{ب}^{-1} + -٢(\text{ه}^{-1})$

$\text{ه} = ٢\begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ١- & ٢- & ٧ \end{pmatrix} + (-٢)\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٠ & ١٢ & ٢ \\ ٤ & ٦ & ٨ \\ ٢- & ٤- & ١٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢- & ٤- & ٦- \\ ٨- & ١٠- & ١٢- \\ ١٤- & ١٦- & ١٨- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ٨ & ٤- \\ ٤- & ٤- & ٤- \\ ١٦- & ٢٠- & ٤- \end{pmatrix}$

(٣) (أ) $\begin{pmatrix} \text{س}+١ & ٥ \\ \text{ص}+٥ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$

$\text{س} + ١ = ٢$ ∴ س = ١

$\text{ص} + ٥ = ٣$ ∴ ص = -٢

(ب) $\begin{pmatrix} \text{س}+٢ & \text{ص}+٣ \\ \text{ع}+٤ & \text{ل}+٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ س + ٢ = ٤ ∴ س = ٢

∴ ص + ٣ = -٣ ∴ ص = -٦

∴ ع + ٤ = ٠ ∴ ع = -٤

∴ ل + ٥ = ٥ ∴ ل = صفر

(جـ) $\begin{pmatrix} ٢+٤ & \text{س} \\ ٣ & \text{ص}-٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

∴ س = ٩ ∴ ص = ١٢

(د) $\begin{pmatrix} \text{س}-٤ & ٣- & ٥- \\ ٧- & \text{ص}-٨ & ٦- \\ ٦ & ٨ & \text{ع}+١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٣- & ٥- \\ ٧- & ١ & ٦- \\ ٦ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

∴ س - ٤ = ١ ∴ س = ٥

∴ ص - ٨ = ١ ∴ ص = ٩

∴ ع + ١ = ٤ ∴ ع = ٣

(٤) أولاً: $\text{ه} = \text{ب} + \text{جـ} + (-\text{أ})$

$= \begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢- & ٣- \\ ١- & ٥- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٢ & ٤- \\ ٩ & ٥- \end{pmatrix}$$

ثانيًا: $٢ س - ب = ٢(ج) + (-٣)أ$

$$= \begin{pmatrix} ٦- & ٩- \\ ٣- & ١٥- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢- \\ ٥- & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ٦- \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢ & ١٧- \\ ٢ & ١٥- \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} ١ & \frac{١٧-}{٢} \\ ١ & \frac{١٥-}{٢} \end{pmatrix}$$

ثالثًا: $ب - ٢ س = ٢ س - ٢ج - ب$

$$٢ ب = ٢ ب + ٢ج + ب$$

$$٢ ب = ٣ ب + ٢ج$$

$$= ٣ \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ٩- \\ ١٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٢ & ٥- \\ ٢٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore ب = \begin{pmatrix} ٣ & \frac{٥-}{٤} \\ \frac{٢٥}{٤} & ٠ \end{pmatrix}$$

رابعًا: $\frac{١}{٢} أ + \frac{١}{٢} س = ٣ س + ٢ ب$

$$\frac{١}{٢} ٢ س = \frac{١}{٢} أ - ٢ ب$$

$$\frac{٥}{٢} س = \frac{١}{٢} أ + (-٢) ب$$

$$\frac{٥}{٢} س = ٢- \begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨- & ٦ \\ ١٠- & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & \frac{٣}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{٥}{٢} \end{pmatrix}$$

$$\frac{٥}{٢} س = \begin{pmatrix} ٧- & \frac{١٥}{٢} \\ \frac{١٩}{٢}- & \frac{٥}{٢} \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} \frac{١٤-}{٥} & ٣ \\ \frac{١٩-}{٥} & ١ \end{pmatrix}$$

خامسًا: $٢ أ + ٣ س = ٢ ب - ٥ ج$

$$٣ س = ٢ ب + (-٥) ج + (-٢) أ$$

$$= \begin{pmatrix} ٦- & ٩- \\ ٣- & ١٥- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ١٠- \\ ٢٥- & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ٦- \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤- & ٢٢- \\ ١٧- & ١٠- \end{pmatrix}$$

$$٣ س = \begin{pmatrix} ١٠- & ٢٢- \\ ١٧- & ٤ \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} ٣ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

سادسًا: $٣ س + أ ٣ = ٢ س + ب$

$$س = ب + (-٣ أ)$$

$$= \begin{pmatrix} ٦- & ٩- \\ ٣- & ١٥- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$س = \begin{pmatrix} ٢- & ١٢- \\ ٢ & ١٥- \end{pmatrix}$$

سابعًا: $٢ س + س = أ + ٢ ب - ٣ ج$

$$\therefore ٢ س + س = \begin{pmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٥- & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ٦- \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$$

$$٢ س + س = \begin{pmatrix} ١٠ & ٩- \\ ٤- & ٥ \end{pmatrix} \quad .... (١)$$

بأخذ مدور الطرفين

$$٢ س + س = \begin{pmatrix} ٥ & ٩- \\ ٤- & ١٠ \end{pmatrix} \quad .... (٢)$$

بضرب (١) × ٢- وجمعها على (٢)

$$\therefore -٣ س = -٢ س + ٢ س + س$$

$$= \begin{pmatrix} ١٥- & ٩- \\ ٦- & ٣- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٢- \\ ٨- & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٠- & ١٨+ \\ ٨+ & ١٠- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ٩- \\ ٤- & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore -٣ س = \begin{pmatrix} ١٥- & ٩ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} ٥ & ٣- \\ \frac{٤-}{٣} & ٠ \end{pmatrix}$$

ثانيًا: $ص = ٢ ب + (ج + ٢ ب)^{-١}$

$$ص = ٢ ب^{-١} + ج^{-١} + (-٢)^{-١}$$

$$= ٢ \begin{pmatrix} ٠ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + (-٢) \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٠- & ٦- \\ ٢- & ٤- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٠ & ٨ \end{pmatrix}$$

$$ص = \begin{pmatrix} ١٠- & ١٠- \\ ١٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$ص = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠- \\ ١٣ & ١٠- \end{pmatrix}$$

ثالثًا: $ص = \begin{pmatrix} ١٠ & ٧ \\ ١٥ & ١٠ \end{pmatrix}$: مجموعهما ٢س

$$\therefore س = \begin{pmatrix} \frac{٧}{٢} & ٥ \\ \frac{١٥}{٢} & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} - س$$

$$\therefore ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{٧}{٢} & ٥ \\ \frac{١٥}{٢} & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١}{٢}- & ٣- \\ \frac{٥}{٢}- & ١- \end{pmatrix}$$

(٦) بفرض أن: $٣ س + ٢ ص = أ$ .... (١)

$$٢ س - ٣ ص = ب$$ ..... (٢)

بضرب ٣ فى العلاقة (١)

، ضرب ٢ فى العلاقة (٢)

$$\therefore ٩ س + ٦ ص = ٣ أ$$

$$٤ س - ٦ ص = ٢ ب$$

بالجمع $١٣ س = ٣ أ + ٢ ب$

$$\therefore ١٣ س = ٣ \begin{pmatrix} ٥- & ٥ \\ ١٤ & ٣ \\ ٥ & ١٤- \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ٥- & ١١ \\ ١٢- & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٠- & ١٠ \\ ٢٨ & ٦ \\ ١٠ & ٢٨- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٦ & ٣ \\ ١٥- & ٣٣ \\ ٣٦- & ١٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٦ & ١٣ \\ ١٣ & ٣٩ \\ ٢٦- & ١٣- \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \\ ٢- & ١- \end{pmatrix}$$

$$\therefore$$ من العلاقة (١): $٢ ص = أ - ٣ س$

$$٢ ص = أ + (-٣) س$$

$$٢ ص = \begin{pmatrix} ٦- & ٣- \\ ٣- & ٩- \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ٥- & ١١ \\ ١٢- & ٥ \end{pmatrix}$$

$$٢ ص = \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٤- & ١ \\ ٣- & ٤ \end{pmatrix} ، ص = \begin{pmatrix} ٦ & ٢- \\ ٨- & ٢ \\ ٦- & ٨ \end{pmatrix}$$

(٧) بضرب العلاقة الثانية × ٢

$$= \begin{pmatrix} ٠+٦- & ٤-٤- \\ ٠+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩- & ٨- \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$$

(٢) $أ ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٨+٢٤ & ١٠+٩ & ٣+٦ \\ ١٦ & ٦ & ١+٤ \\ ٨+٤ & ٥+٣ & ٢+٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣٢ & ١٩ & ٩ \\ ١٦ & ٦ & ٥ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$$

$ب أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٤+١٠ & ٨+٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٨+٦+٦ & ١٦+٣+٦ & ٨+٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٤ & ١٣ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢٠ & ٢٥ & ١٢ \end{pmatrix}$$

(٣) أولاً : $ب + ج = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

$أ(ب + ج) = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- & ٢- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢-٤- & ٤- \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦- & ٤- \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

إرشادات تمارين (٢)
على ضرب المصفوفات

(١) $أ ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix}$

$$+ \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٨- & ٩ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٨- & ١٥ \end{pmatrix}$$

$ب أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

$$+ \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٢٣- & ٦ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٢٣- & ٠ \end{pmatrix}$$

$أ ب \neq ب أ$

$أ(ب + ج) = أ ب + أ ج$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٠ & ٠ \\ ١٢- & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣٢ & ٠ \\ ١٢- & ٣ \end{pmatrix}$$

$ب أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

$$+ \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٠ & ٠ \\ ١٢- & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣٢ & ٠ \\ ١٢- & ٣ \end{pmatrix}$$

(ب) $(أ ب) ج$

$أ ب = \begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٣-٢ & ٢-٢- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٤- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$(أ ب) ج = \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- & ٤- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ١+١٢- & ٤-٢ \\ ٣-٦ & ٦+٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١- & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

بدلاً: $٦ ب^{-١}$

$٦ = \begin{pmatrix} ٢- & ٠ \\ ١- & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore ٦ ب^{-١} = \begin{pmatrix} ٢- & ٠ \\ ١- & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٤- & ٢- \\ ٣+٢- & ١-١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤- & ٢- \\ ١ & ٢- \end{pmatrix}$$

بدلاً: $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٢س+٨ \\ ٢ص+١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

$٢س + ٨ = ٢$ $\therefore ٢س = -٦$

$\therefore س = -٣$

$\therefore ٢ص + ١٢ = ٠$ $\therefore ص = -٦$

(ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ص \end{pmatrix}$

$\therefore س = ٢$ ، $ص = ٨$

(ج) $(س+٨ \quad ٥+٢ص \quad ٤+٤ع)$

$= (٣ \quad ١٧ \quad ٢٠-)$

$\therefore س + ٨ = ٣$ $\therefore س = -٥$

$٥ + ٢ص = ١٧$ $\therefore ٢ص = ١٢$

$\therefore ص = ٦$

$٤ع = -٢٠$ $\therefore ع = -٤$

(٥) $أ ب = \begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & ٨- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٢س-١٦ & ٤س+٨ \\ ٢ص+٣٢ & ٤ص-١٦ \end{pmatrix}$$

$ب أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٤ \\ ص & ٨- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٢س+٤ص & ٢٤- \\ ٤-س+٢ص & ٣٢- \end{pmatrix}$$

$\because أ ب = ب أ$

$\therefore ٢س - ١٦ = ٢س + ٤ص$ .... (١)

$\therefore ص = -٤$

$٤س + ٨ = -٢٤$ $\therefore ٤س = -٣٢$

$\therefore س = -٨$

(٦) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٦ & ٤- \\ ٩ & ٦- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ & ٤- \\ ٩ & ٦- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٣٦-٣٦ & ٢٤+٢٤- \\ ٥٤-٥٤ & ٣٦+٣٦- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$= \square$ $\therefore أ^{٢} = \square$

(٧) $\text{م}^2 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

$\therefore \text{م}^2 = 3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

(٨) $\text{م}^2 = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{4}{25}+\frac{4}{25}&\frac{2}{25}+\frac{3}{25}\\\frac{8}{25}+\frac{12}{25}&\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{8}{25}&\frac{5}{25}\\\frac{20}{25}&\frac{13}{25}\end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^2 = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{25}&\frac{5}{25}\\\frac{20}{25}&\frac{15}{25}\end{pmatrix} =$

(٩) $\text{م}^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+0+9&2+0+6&3-2-3\\3+0+3&6+0+2&9-2-3\\1-0-1&2-0-1&3+2+1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}10&8&4\\6&2&-2\\3&3&6\end{pmatrix}$

$\text{م}^2 = \begin{pmatrix}8&8&8\\-6&-2&-3\\10&8&4\end{pmatrix}$

$\text{م}^2 = \begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&-1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+0+6&2+0+4&3-2-2\\1+0-3&2+0-2&3+2-2\\2+0+3&4+0+2&6-2-2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}7&6&3\\-2&0&3\\5&6&2\end{pmatrix}$

$\text{م}^2 = \begin{pmatrix}5&6&5\\-2&-2&-3\\7&6&3\end{pmatrix}$

$\text{م}^2 - \text{م}^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$

(١٠) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix}-2&5&-7\\10&-5&5\\-8&5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&5&6\\-1&3&4\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-2+20-8&-5+10-7&-2+4+3\\-5+25-18&5-25+30&2-4-18\\-3+15-12&-5+15-20&-3+5+32\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}10&-2&5\\-18&10&-20\\-12&-10&34\end{pmatrix}$

$= 10\text{ا} = \text{الأيسر}$

(١١) $\text{أ}^2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3&5\\7&8\end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix}8&-5\\-7&3\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}24-35&-40+15\\56-56&-35+24\end{pmatrix}$

(١٢) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix}3&-1\\5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\5&-3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}9-5&-3+3\\15-15&-5+9\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix} = 4\text{ا}$

$\therefore \text{أ}^{-2} = \frac{1}{4}\text{ا}$

$\therefore \text{أ}^{-2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&3\end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-2} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

(١٣) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix}3&4&6\\0&0&1\\5&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&6\\0&0&1\\5&3&9\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}9+0+30&12+0+24&18+0+54\\0+0+5&0+0+4&0+0+9\\15+0+45&12+0+40&18+0+81\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}39&36&90\\5&4&9\\60&52&99\end{pmatrix}$

$\text{أ}^2 - 3\text{أ} - 5\text{ا} = \begin{pmatrix}39&36&90\\5&4&9\\60&52&99\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9&12&18\\0&0&3\\15&9&27\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}25&24&72\\5&-1&6\\45&43&72\end{pmatrix}$

(١٤) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+6&-2+10\\-3+15&6+25\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}7&8\\12&31\end{pmatrix}$

$\text{أ}^2 - 2\text{أ} + 17\text{ا} = \begin{pmatrix}7&8\\12&31\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2&4\\6&10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}17&0\\0&17\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}22&4\\6&21\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}17&0\\0&17\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}39&4\\6&38\end{pmatrix}$

(١٢) $\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix}3&4&6\\1&0&3\\9&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&0\\3&5&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3+8+18&30&6+18\\3+3&5&1+18\\5+12+27&45&9+30\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}29&30&24\\6&5&19\\44&45&39\end{pmatrix}$

$\text{ب}\text{أ} = \begin{pmatrix}12&0&2\\0&0&4\\6&10&2\end{pmatrix}$

$\text{ب}\text{أ} + 2\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix}29&30&24\\6&5&19\\44&45&39\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}24&30&29\\19&5&6\\39&45&44\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}53&60&53\\25&10&25\\83&90&83\end{pmatrix}$

$\therefore \text{س}^2 = \text{أ}\text{ب} + 2\text{أ}\text{ب}$

$= \begin{pmatrix}31&30&36\\10&5&19\\50&55&41\end{pmatrix}$ ..... (١)

بأخذ مدور الطرفين

$\therefore \text{س} + 2\text{س}^2$

$= \begin{pmatrix}31&10&50\\30&5&55\\36&19&41\end{pmatrix}$ ..... (٢)

بضرب العلاقة الأولى فى -٢ وجمعها على العلاقة (٢)

$\therefore -3\text{س} = \begin{pmatrix}-31&-50&-22\\10&-5&17\\-64&-91&-41\end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix}\frac{31}{3}&\frac{50}{3}&\frac{22}{3}\\\frac{10}{3}&\frac{5}{3}&\frac{17}{3}\\\frac{64}{3}&\frac{91}{3}&\frac{41}{3}\end{pmatrix}$

(١٤) أولاً: $3\text{س} - 5\text{س}^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أ} + \text{ب}^2$

$\because \text{أ}^2 = \begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3-2&-4+5\\-9+5&15+10\end{pmatrix}$

$\text{أ}^2 = \begin{pmatrix}1&4\\-4&25\end{pmatrix}$ ، $-2\text{أ} = \begin{pmatrix}-2&-4\\6&-10\end{pmatrix}$

$\text{ب}^2 = \begin{pmatrix}-1&6\\4&-3\end{pmatrix}$

$\because 3\text{س} - 5\text{س}^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أ} + \text{ب}^2$

$\therefore 3\text{س} - 5\text{س}^2 = \begin{pmatrix}6&-3\\-19&5\end{pmatrix}$ .... (١)

بأخذ محدد الطرفين:

$$\begin{vmatrix} 19 & 0- \\ 5- & 3 \end{vmatrix} \ldots (2) = \begin{vmatrix} 9 & 18- \\ 15- & 57 \end{vmatrix} \ldots (1)$$

$$\therefore 95 - 90 = 5$$

بضرب العلاقة (1) × 3

بضرب العلاقة (2) × 5 والجمع

$$\begin{pmatrix} 9 & 18- \\ 15- & 57 \end{pmatrix} = \ldots (1)'$$

$$\begin{pmatrix} 95 & 30- \\ 25- & 15 \end{pmatrix} = \ldots (2)'$$

$$\begin{pmatrix} 104 & 48- \\ 40- & 72 \end{pmatrix} = \text{بالجمع: } -19$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{104-}{19} & \frac{48-}{19-} \\ \frac{40-}{19-} & \frac{72}{19-} \end{pmatrix} = \text{ب}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{13-}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & \frac{9-}{2} \end{pmatrix} = \text{أ}$$

ثانياً: $\text{ب}^{-1} + 5\text{ب} = \text{أ}\text{ب} - (\text{ب أ})^{-1}$

$\text{ب}^{-1} + 5\text{ب} = \text{أ}\text{ب} - 9\text{ب}^{-1}$

$$\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 1- \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1- & 4 \\ 6 & 3- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2- & 4+3 \\ 18+5- & 20-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8- & 11 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 4 & 9- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 0- \\ 5- & 3 \end{pmatrix} \ldots (2) = \text{بأخذ محدد الطرفين: } -95$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 26- \\ 26 & 0 \end{pmatrix} = \ldots (1)$$

بأخذ مدور الطرفين

$$\therefore \text{س} + 5\text{س}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 26- \\ 26 & 14 \end{pmatrix} \ldots (2)$$

بضرب (1) × 5− وجمعها على (2)

$$\therefore -5\text{س}^{-1} - 25\text{س} + \text{س} + 5\text{س}^{-1} = \begin{pmatrix} 70- & 130 \\ 130- & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 26- \\ 26 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -24\text{س} = \begin{pmatrix} 70- & 104 \\ 104- & 14 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} 70 & 104- \\ 24 & 24 \\ 104 & 14- \\ 24 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{12} & \frac{13-}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{7-}{12} \end{pmatrix}$$

(15) $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 2 & 4- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 2 & 4- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & 2-2- \\ 4+4 & 8-8- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4- \\ 8 & 16- \end{pmatrix}$$

$$-4\text{أ} = \begin{pmatrix} 8- & 4 \\ 16- & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{2} + (4-)\text{أ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$$

(16) $\text{أ}^{2} = \begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 2 & 1- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 2 & 1- \end{pmatrix}$

(17) $\text{أ}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3+4 & 9- \\ 16+1- & 4-3- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 7- \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}7- = \begin{pmatrix} 7- & 21- \\ 28- & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}13 = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{2} + (7-)\text{أ} + \text{I}13 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$$

(18) $\because \text{أ}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+5 & 10-30 \\ 2-6 & 5+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20- \\ 4- & 41 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}4 = \begin{pmatrix} 8+ & 20+ \\ 4+ & 24- \end{pmatrix}$$

$$-\text{I}17 = \begin{pmatrix} 17- & 0 \\ 0 & 17- \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{2} + 4\text{أ} - \text{I}17 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$$

(19) $\text{أ}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0+2 & 6+1 \\ 0+6 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-\text{أ} = \begin{pmatrix} 2- & 1- \\ 0 & 3- \end{pmatrix}$$

$$-\text{I}6 = \begin{pmatrix} 0 & 6- \\ 6- & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{2} + (-\text{أ}) + (-6\text{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$$

إرشادات تمارين (٤) على المحددات

(١) ١٠ (٢) ٢ (٣) $12 - 10 = 2$

(٤) صفر (٥) $14 - 15 = -1$

(٦) $-1 - 6 = -7$ (٧) $-42 + 57 = 15$

(٨) $\text{ب}(\text{أ} + \text{س}) - \text{أ}(\text{ب} + \text{ص})$

$= \text{ب}\text{أ} + \text{ب س} - \text{أ ب} - \text{أ ص}$

$= \text{ب س} - \text{أ ص}$

(٩) $(\text{س}+1)(\text{ص}^{2}+1) - (\text{س}^{2}+1)(\text{ص}+1)$

$= \text{س ص}^{2} + \text{س} + \text{ص}^{2} + 1$

$- \text{س}^{2}\text{ص} - \text{ص} - \text{س}^{2} - 1$

$= \text{س ص}^{2} + \text{س} + \text{ص}^{2}$

$- \text{س}^{2}\text{ص} - \text{ص} - \text{س}^{2}$

(١٠)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1- & 4 & 4 & 1- & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 32 - 21 - 28 + 16 = -1$

(١١) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٧ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٠ - ٦٠ - ٢٠ = ٤٠$

(١٢) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤- & ٣ \\ ٠ & ٣- & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٦٣٦ = ١٦ + ٦٢٠$

(١٣) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٣ & ٣ \\ ٣- & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٧ - ٨٤ + ٩ = ٩٣$

(١٤) المحدد مثلثي قيمته $= ٦ \times ٥ \times ١ = ٣٠$

(١٥) المحدد مثلثي قيمته $= ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$

(١٦) المحدد مثلثي قيمته $= ٤ \times ٠ \times ٣ =$ صفر

(١٧) $\begin{vmatrix} ١- & ٧ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٧ \times ٥ \times ٤ - ٢١ = ١١٩$

(١٨) $\begin{vmatrix} ٢- & ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣- & ١ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٤ \times ١ \times ٥ = ٢٠$

(١٩) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٥ & ٩ & ٧ \\ ٠ & ٨ & ٠ \end{vmatrix} = ٣$

(٢٠) مثلثي قيمته $= ١ \times ٨ \times ٠ =$ صفر

(٢١) مثلثي قيمته $= -٤ \times ٦ \times ٨ = -١٩٢$

(٢٢) مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٤ & ٢- \\ ٤ & ٢- & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}[٨ + ٤ + ٤ + ٨] = ١٢$

(٢٣) مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٤- \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٤- & ٤- & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}[٦ + ٣ + ١٦ - ٢ + ١٢ + ١٢] = \frac{٤٧}{٢}$

(٢٤) $= \frac{١}{٢}[-٢ + ٨ + ٩ + ٤ + ٦ + ٦] = \frac{٣١}{٢}$

(٢٥) $= \frac{١}{٢}[$صفر $- ٦ + ٦ + ١٥ - ٦$ $] = \frac{٩}{٢}$

ارشادات تمارين (٥) على حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

(١) م . ح $= \{(٦ ، ٢)\}$

(٢) م . ح $= \{(\frac{٤}{٥} ، \frac{-٩}{٥})\}$

(٣) م . ح $= \{(٠ ، ٠)\}$

(٤) م . ح $= \{(\frac{٢}{٧} ، \frac{١٠}{٧})\}$

(٥) م . ح $= \{(\frac{٢}{٧} ، \frac{-١}{٧})\}$

(٦) م . ح $= \{(-١ ، ٢ ، ٣)\}$

(٧) م . ح $= \{(٠ ، -١ ، ٠)\}$

(٨) م . ح $= \{(١ ، ٢ ، -٢)\}$

(٩) م . ح $= \{(٢ ، ٢ ، ٠)\}$

(١٠) م . ح $= \{(\frac{٥}{٣} ، \frac{٦٥}{١٢} ، \frac{-١١}{١٢})\}$

ارشادات تمارين (٦) على المعكوس الضربي للمصفوفة

(١) $\Delta = ٨ \neq ٠$ له معكوس

$$\text{ا}^{-١} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{-١}{٤} \end{pmatrix}$$

(١٠) $\Delta = ٦٤ - ٦٤ = ٠$

∴ ص ليس لها معكوس ضربي .

(١١) $-١٠ + ١٠ =$ صفر

∴ ع ليس لها معكوس ضربي .

(١٢) قيم ا التى لا تجعل للمصفوفة معكوس ضربى هى : $س^{٢} = ٣٦$

∴ $س = \pm ٦$

∴ قيم ا التى تجعل للمصفوفة معكوس ضربى = ح $- \{٦ ، -٦\}$

(١٣) ∵ ا(ا $- ٢) - ٣ = ٠$

∴ $\text{ا}^{٢} - ٢\text{ا} - ٣ = ٠$

∴ (ا $- ٣)(\text{ا} + ١) = ٠$

∴ ا $= ٣$ ، ا $= -١$

∴ قيم ا التى تجعل للمصفوفة ليس لها معكوس ضربى هى $\{٣ ، -١\}$

(١٤) ∵ ا $\times \begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = I$

كل منهما معكوس للآخر .

$$\therefore \text{ا} = \frac{-١}{٢}\begin{pmatrix} ٣- & ١ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

(١٥) ~ معكوس ضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

$$\therefore \sim = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$$

(١٦) ∵ $\Delta = س ص + ٠ \times -س ص$

$= س ص \neq ٠$

$$\therefore \text{ب}^{-١} = \frac{١}{س ص}\begin{pmatrix} ص & س ص \\ ٠ & س \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ \frac{١}{ص} & ٠ \end{pmatrix}$$

(١٧) م . ح $= \{(٣ ، -١)\}$

(١٨) م . ح $= \{(-١ ، ٢)\}$

(١٩) م . ح $= \{(٢ ، ٦)\}$

(٢٠) م . ح $= \{(١ ، ٥)\}$

(٢١) م . ح $= \{(١ ، ١)\}$

(٢٣) ∵ أ ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ أ^-١ أ ب = أ^-١ × $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ ب = أ^-١ × $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

= $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

= $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١٢ & -٦+١٤ \\ ٤ & -٢+١٤ \end{pmatrix}$

∴ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (حقق ذلك)

(٢٤) أ، ب تكون معكوس ضربي للآخر

أ ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & -١ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} \frac{٥}{٤} & -٢٠ \\ -\frac{١}{٢} & ٢ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} \frac{٥}{٤} & -٢٠ \\ -\frac{١}{٢} & ٢ \end{pmatrix}$

ب أ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & -١ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ١-١+٠ & ٢-٤+٠ \\ -٥+٥ & -٨+٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{pmatrix}$

= ١

إرشادات تمارين (١)

س > ٣ بالقسمة على ٣

∴ س > ١

م . ح =]١ ، ∞-[

س + ٢ > ٥

∴ س > ٣

م . ح =]٣ ، ∞-[

٣ + ٢ > س ∴ س > ٥

∴ س > $\frac{-٢}{٣}$ بالقسمة على ٣

م . ح =]$\frac{-٢}{٣}$ ، ∞[

٣ + ٥- > س ∴ س > ٣ + ٥-

∴ س > ٢-

م . ح =]٢- ، ∞[

٤ ≥ ٥س بالقسمة على ٥

∴ س ≤ $\frac{٤}{٥}$

م . ح = [$\frac{٤}{٥}$ ، ∞[

٧ ≤ ٣س بالقسمة على ٣

∴ س ≤ $\frac{٧}{٣}$

م . ح =]∞- ، $\frac{٧}{٣}$]

س + ١ ≥ س ∴ ٢س - س ≥ ١-

∴ س ≥ ١-

م . ح =]١- ، ∞-[

٣س - ٤ ≤ س + ٨

∴ ٢س - س ≤ ١٢

∴ س ≤ ١٢ بالقسمة على ٢

(٩) س - ١ ≤ ٣س - ٥

∴ ٥ - ١ ≤ ٣س - س

∴ ٤ ≤ ٢س بالقسمة على ٢

∴ ٢ ≤ س

∴ م . ح =]٢ ، ∞-[

(١٠) ٤ < س ≤ ٦ ∴ م . ح =]٤ ، ٦]

(١١) ١- - ٢ ≤ -س ≤ ٢ - ٢

∴ ٣- ≤ -س ≤ ٠ بالضرب × ١-

∴ ٣ ≥ س ≥ ٠

∴ م . ح = [٠ ، ٣]

(١٢) ٣- < ٤س + ٥ ≤ ٧

٣- - ٥ < ٤س ≤ ٧ - ٥

٨- < ٤س ≤ ٢ بالقسمة على ٤

∴ ٢- < س ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ م . ح =]٢- ، $\frac{١}{٢}$]

(١٣) س - ١ < ٢س - ٥ < س + ٥

بإضافة (-س) للأطراف

س - ١ - س < ٢س - ٥ - س < س + ٥ - س

∴ ١- < س - ٥ < ٥ بإضافة ٥ للأطراف

١- + ٥ < س - ٥ + ٥ < ٥ + ٥

∴ ٤ < س < ١٠ ∴ م . ح =]٤ ، ١٠[

(١٤) ٣س - ٦ < ٢س + ٦ ≤ ٣س + ١٨

∴ −٦ > ٦−س ≥ ١٨

بإضافة (−٦) لكل الأطراف

∴ −٦ − ٦ > −س ≥ ١٨ − ٦

∴ −١٢ > −س ≥ ١٢

بالقسمة على (−١) للأطراف

∴ ١٢ > س ≥ −١٢

∴ −١٢ ≤ س < ١٢

∴ م. ح = [−١٢ ، ١٢[

(١٥) يجب القسمة إلى متباينتين هكذا

٣س − ٢ ≥ ٣س − ٥

∴ ٥ − ٢ ≥ ٣س − ٣س ∴ ٢ ≥ س

∴ م. ح =]−∞ ، ٢]

٣س − ٥ > س − ٣

٣س − س > −٣ + ٥

٢س > ٢ ∴ س > ١

∴ م. ح =]١ ، ∞−[

مجموعة حل:

٣س + ٢ ≥ ٣س − ٥ > س − ٣

هي عبارة عن تقاطع

]−∞ ، ٢] ∩]١ ، ∞−[= ∅

∴ مجموعة الحل = ∅

إرشادات تمارين (٢)

(١) س > ٣

لاحظ أن:

٠ ≯ ٣

∴ (٠ ، ٠)

∉ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هي الجزء المظلل

ونقط المستقيم س = ٣ لا تنتمي للحل

(٢) ص ≥ ١

∵ ٠ ≱ ١

∴ (٠ ، ٠)

∋ مجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ومجموعة نقط المستقيم ص = ١ تنتمي للحل

(٣) ص < −٣

∵ ٠ ≮ −٣

∴ (٠ ، ٠)

∉ مجموعة الحل

ومجموعة نقط المستقيم ص = −٣ لا تنتمي إلى الحل

(٤) س < ص

٣ ≮ ٠

∴ (٣ ، ٠)

∉ مجموعة الحل

الجزء المظلل هو مجموعة الحل ومجموعة نقط المستقيم س = ص لا تنتمي للحل

(٥) س − ص = ٥

س	٠	٥
ص	−٥	٠

٠ > ٥

∴ (٠ ، ٠)

∋ لمجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقط المستقيم س − ص = ٥ لا تنتمي للحل

(٦) س + ص = ١

س	٠	١
ص	١	٠

٠ ≯ ١

∴ (٠ ، ٠)

∉ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل

ونقط المستقيم س + ص = ١

ليست من مجموعة الحل

(٧) س + ص = ٤

س	٠	٤
ص	٤	٠

٠ ≯ ٤

∴ (٠ ، ٠)

∉ لمجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل .

نقط المستقيم س + ص = ٣ من مجموعة الحل

(٨) ٣س + ٢ص = ٦

س	٠	٢
ص	٣	٠

٠ ≯ ٦

∴ (٠ ، ٠)

∉ لمجموعة الحل

ونقط المستقيم ٢س + ٣ص = ٦

ليست من مجموعة الحل

(٩) ٢س + ٥ص = ١٠

س	٠	٥
ص	٢	٠

٠ < ١٠

∴ (٠ ، ٠)

∋ مجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هى الجزء المظلل

ونقط المستقيم ليست من مجموعة الحل

(١٠) ٥س − ٣ص = ٠

س	٠	١
ص	٠	$\frac{٥}{٣}$

المستقيم يرسم متقطع عوض فى النقطة (٣ ، ٠)

١٥ − ٣ × ٠ ≯ ٠

∴ (٣ ، ٠) ∉ لمجموعة الحل

∴ الجزء المظلل هو مجموعة الحل

ونقط المستقيم ∉ إلى مجموعة الحل

(١١) ٣س + ٤ص = ٠

(٣ ، ٠)

∋ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو

(١٢) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} \geq ١$ بالضرب × ٦

$٣س + ٢ص \geq ٦$

∴ المستقيم

س	٠	٢
ص	٣	٠

$٣س + ٢ص = ٦$

$٠ \geq ٦$ ∴ $(٠،٠) \in$ مجموعة الحل

ونقط المستقيم نفسه $\notin$ لمجموعة الحل

(١٣) بالضرب × ٦ $٩س - ٤ص > ٦$

س	٠	$\frac{٢}{٣}$
ص	$-\frac{٣}{٢}$	٠

$٠ \not> ٦$

∴ $(٠،٠) \notin$ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم $\notin$ للحل

(١٤) $\frac{ص}{٢} - ٣ \leq ص$ بالضرب × ٢

$س - ٦ \leq ٢ص$ ، $س - ٢ص = ٦$

س	٦	٠
ص	٠	-٣

$(٠،٠)$

$٠ \not\leq ٦$ ∴ $(٠،٠) \notin$ لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم $\in$ إلى مجموعة الحل

(١٥) $ص \geq ٢ - \frac{س}{٣}$ بالضرب × ٣

$٣ص \geq ٦ - س$ ، $٣ص + س \geq ٦$

∴ $٣ص + س = ٦$

س	٠	٦
ص	٢	٠

$٠ \not\geq ٦$

∴ $(٠،٠) \notin$ لا تنتمي لمجموعة الحل

∴ مجموعة الحل هو الجزء المظلل ونقط المستقيم تنتمي إلى مجموعة الحل

إرشادات تمارين (٣)

(١) (أ) $س - ص = ١$

س	٠	١
ص	-١	٠

$٠ \not> ١$

∴ $(٠،٠)$ لا تنتمي إلى مجموعة الحل للمتباينة $س - ص > ١$

(ب) $س + ص = ٣$

س	٠	٣
ص	٣	٠

$٠ < ٣$ ∴ $(٠،٠)$ تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة $س + ص < ٣$

حل المتباينتين معًا هو الجزء المظلل ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمي إلى مجموعة الحل

∴ نقطة تقاطع المستقيمين $(٢، ١)$

(٢) (أ) $٢س - ص = -٣$

س	٠	$-\frac{٣}{٢}$
ص	٣	٠

$٠ \not< -٣$

∴ $(٠،٠) \notin$ لمجموعة حل المتباينة : $٢س - ص < -٣$

(ب) $س + ص = ١$

س	٠	١
ص	١	٠

∴ $(٠،٠) \in$ لمجموعة حل المتباينة : $س + ص < ١$

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين

مجموعة نقط المستقيمين $\notin$ مجموعة الحل

ملحوظة : نقطة التقاطع هى $(-\frac{٢}{٣}، \frac{٥}{٣})$

(٣) (أ) $س + \frac{٣}{٤}ص > -٣$ بالضرب × ٤

$٤س + ٣ص > -١٢$

∴ $٤س + ٣ص = -١٢$

س	٠	-٣
ص	-٤	٠

$٠ \not> -٣$

∴ $(٠،٠) \notin$ لمجموعة حل المتباينة : $٤س + ٣ص > -١٢$

(ب) بالضرب × ٥ ∴ $٥س - ٢ص > -٥$

∴ $٥س - ٢ص = -٥$

س	٠	-١
ص	$\frac{٥}{٢}$	٠

$٠ \not> -٥$

∴ $(٠،٠) \notin$ لمجموعة حل المتباينة : $٥س - ٢ص > -٥$

ملحوظة : نقطة التقاطع هى $(-\frac{٣٩}{٢٣}، \frac{-٤٠}{٢٣})$

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين ، لاحظ أن نقط المستقيمين لا تنتمي إلى مجموعة الحل

(٤) (أ) $س = ص$ عوض عن $س = ٣$ ، $ص = ٠$ $٣ > ٠$

∴ $(٣، ٠) \in$ لمجموعة حل المتباينة : $س - ص > ٠$

(ب) $٢س + ص = ٥$

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	٥	٠

$(٠،٠) \notin$ مجموعة حل المتباينة : $٢س + ص > ٥$

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين معًا ، والجزأن من المستقيمين من الجزء المظلل لا ينتمى إلى مجموعة حل المتباينتين .

نقطة تقاطع المستقيمين $(\frac{٥}{٣}، \frac{٥}{٣})$

(٥) (أ) $س + ص = ٣$

س	٠	٣
ص	٣	٠

$(٠،٠) \in$ مجموعة الحل للمتباينة : $س + ص < ٣$

(ب) $س - ص = -١$

س	٠	-١
ص	١	٠

لاحظ أن نقطة تقاطع

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :
س − ص < −١
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا
لاحظ أن المستقيمين مرسومان غير متصلين

(٧) (أ) ٢س − ٥ص = −٢

س	٠	−١
ص	٠	$\frac{٢}{٥}$

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :
٢س − ٥ص ≤ −٢

(ب) ص = −٢ يرسم موازيًا لمحور السينات
متقطع (٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة
ص > −٢ ، نقطة التقاطع هى (−٦ ، −٢)
مجموعة حل المتباينة هو الجزء المظلل

(ج) ص − س = −٢ يرسم متصلاً

س	٠	٢
ص	−٢	٠

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

(د) ص − ٢س = ٤ يرسم متصلا

س	−٢	٠
ص	٠	٤

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

ص ≥ ٢س + ٤
نقطة التقاطع : (−٦ ، −٨)
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا

(٨) ٢س + ص = ٥

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	٥	٠

يرسم متقطع

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :
٢س + ص > ٥
ص = ٠ هو محور السينات
الجزء المظلل هو حل المتباينتين معًا
نقط المستقيم ∉ إلى الحل

(٩) س − ٢ص = ٣

س	٠	٣
ص	$-\frac{٣}{٢}$	٠

يرسم متقطع

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س > ٣ + ٢ص
، س = ٠ هو محور الصادات
الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينتين معًا

(١٠) ص = ٢
(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :
ص > ٢
س + ص = −٢

س	٠	−٢
ص	−٢	٠

يرسم متقطع
يرسم متصل

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س + ص ≤ −٢
نقطة التقاطع (−٤ ، ٢)
س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول

ص − س = −٢

س	٠	−٢
ص	٢	٠

يرسم متقطع

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
ص + ٢ > ص
ص + ٢س = ٤ يرسم متقطع

س	٠	٢
ص	٤	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
ص + ٢س < ٤
نقطة التقاطع $(\frac{٢}{٣} ، \frac{٨}{٣})$
الجزء المظلل هو حل المتباينات
لاحظ أن نقطة التقاطع لا تنتمى إلى مجموعة الحل للمتباينات

(١٢) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول
س + ص = ٤ يرسم متصل

س	٠	٤
ص	٤	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :
س + ص ≥ ٤
مثلث المظلل هو مجموعة حل ال

(١٣) س = −٢ يرسم موازيًا لمحور الصادات
يرسم متصل ، ص = ٥ يرسم موازيًا لمحور السينات ويرسم متصلا
س − ص = ٣ يرسم متصل

س	٠	٣
ص	−٣	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة : س − ص ≥ ٣
لاحظ أن تقاطع س − ص = ٣ مع ص = ٥
هى (٨ ، ٥) وتقاطع س − ص = ٣
مع س = −٢ هى (−٢ ، −٥)
الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

(١٤) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ تعنى الحل يقع فى الربع الأول
(أ) ٣س + ٢ص = ٦ يرسم متقطعًا

س	٠	٢
ص	٣	٠

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

(ب) س + ص = ٢ يرسم متصلاً

س	٢	٠
ص	٠	٢

∴ (٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

س + ص ≤ ٢

الجزء المظلل هو حل المتباينات

إرشادات تمارين (٤)

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعنى أن الحلول تقع فى الربع الأول

(أ) س = ٢ص يرسم متصلاً

(٣٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

س ≤ ٢ص

(ب) س + ص = ٩٠ يرسم متصلا

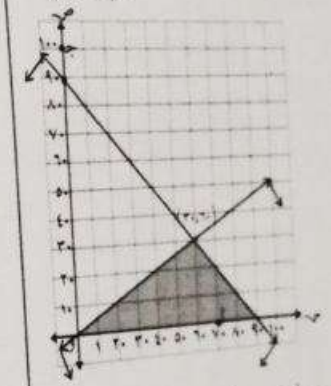
س	٠	٩٠
ص	٩٠	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

س + ص ≥ ٩٠

نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٩٠

س = ٢ص



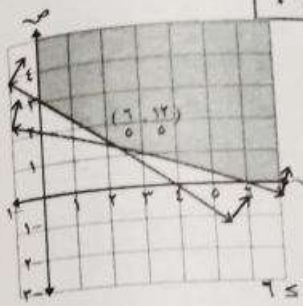
هو (٦٠،٣٠) الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات معاً .

رؤوس مضلع الحل هى : (٠،٩٠) ، (٦٠،٣٠) ، (٠،٠)

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠ تعنى أن مجموعة الحل تقع فى الربع الأول

(أ) س + ٣ص = ٦ يرسم متصلاً

س	٠	٦
ص	٢	٠



(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

س + ٣ص ≤ ٦

(ب) ٣س + ٤ص = ١٢ يرسم متصلاً

س	٠	٤
ص	٣	٠

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٤ص ≤ ١٢

نقطة تقاطع المستقيمين هى $(\frac{١٢}{٥} ، \frac{٦}{٥})$

الجزء المظلل هو حل المتباينات معًا

رؤوس مضلع الحل هى :

$(٦،٠) ، (٠،٣) ، (\frac{١٢}{٥} ، \frac{٦}{٥})$

∴ ر(٠،٦) = ٥ × ٦ + ١٠ × ٠ = ٣٠

ر(٠،٣) = ٠ × ٠ + ١٠ × ٣ = ٣٠

ر$(\frac{١٢}{٥} ، \frac{٦}{٥})$ = ٥ × $\frac{١٢}{٥}$ + ١٠ × $\frac{٦}{٥}$

= ١٢ + ١٢ = ٢٤

أصغر قيمة عند $(\frac{١٢}{٥} ، \frac{٦}{٥})$ وتساوى ٢٤

ر(٠،٠) = صفر أصغر قيمة

ر(٦٠،٣٠) = ٥ × ٦٠ + ٣٠ × ٧

= ٣٠٠ + ٢١٠ = ٥١٠ أكبر قيمة

ر(٩٠،٠) = ٥ × ٩٠ + ٧ × ٠ = ٤٥٠

∴ أكبر قيمة عند (٦٠،٣٠) وتساوى ٥١٠

أكبر قيمة عند (٠،٠) وتساوى ٣٠

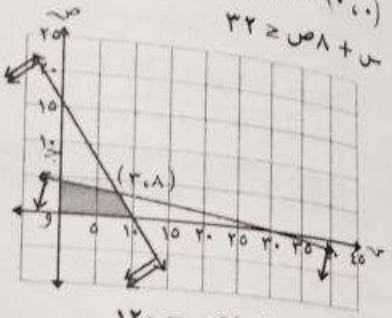
(٣) س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠ الحل فى الربع الأول

(أ) س + ٨ص = ٣٢ يرسم متصلاً

س	٠	٣٢
ص	٤	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة الحل للمتباينة :

س + ٨ص ≥ ٣٢



(ب) ١٢س + ٨ص = ١٢٠

بالقسمة على ٤

٣س + ٢ص = ٣٠ يرسم متصلاً

س	٠	١٠
ص	١٥	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

١٢س + ٨ص ≥ ١٢٠

نقطة التقاطع (٨ ، ٣)

رؤوس مضلع الحل هى :

(١٠،٠) ، (٠،٠) ، (٨ ، ٣) ، (٠،٤)

ر(١٠،٠) = ١٠ × ٢٥ = ٢٥٠

ر(٠،٠) = صفر

ر(٨ ، ٣) = ٨ × ٢٥ + ٣ × ٤٥

= ٢٠٠ + ١٣٥ = ٣٣٥

ر(٠،٤) = ٠ × ٢٥ + ٤ × ٤٥ = ١٨٠

أكبر قيمة عند (٨ ، ٣) وتساوى ٣٣٥

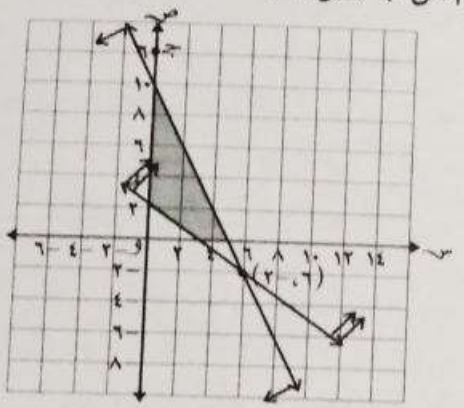
وأصغر قيمة عند (٠،٠) وتساوى صفرًا

(أ) ٣ص + ٢س = ٦ يرسم متصلاً

س	٠	٣
ص	٢	٠

(٠،٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

٣س + ٢ص ≤ ٦



(ب) ٢س + ص = ١٠ يرسم متصلاً

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠،٠) ∈ مجموعة حل المتباينة :

نقطة التقاطع هى (٦ ، -٢)

الجزء المظلل هو مجموعة حل المتباينات

رؤوس مضلع الحل هى :

(٥،٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠،٢) ، (١٠،٠)

ر(٥،٠) = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١٥

ر(٣ ، ٠) = ٣ × ٢ + ٣ × ٠ + ٥ = ١١

ر(٠،٢) = ٠ × ٢ + ٣ × ٢ + ٥ = ١١

ر(٠،١٠) = ٠ × ٢ + ٣ × ١٠ + ٥ = ٣٥

∴ أكبر قيمة عند (٠،١٠) وتساوى ٣٥

وأصغر قيمة عند (٣ ، ٠) ، (٠،٢)

وتساوى ١١

(٥) أولاً : $-٣ \geq س \geq ٣$

رسم المستقيمان $س = ٣$ ، $س = -٣$

$(٠،٠) \in$ لهذه المتباينة : $-٣ \geq س \geq ٣$

ثانياً : $-٤ \geq ص \geq ٤$

رسم المستقيمين $ص = ٤$ ، $ص = -٤$

$(٠،٠) \in$ لهذه المتباينة : $-٤ \geq ص \geq ٤$

∴ مجموعة حل $-٣ \geq س \geq ٣$ ،

$-٤ \geq ص \geq ٤$

هو المضلع أ ب جـ ء

ثالثاً : رسم $٢س + ٣ص = ١٢$ متصلاً

س	٠	٣
ص	٤	٠

$(٠،٠) \in$ مجموعة حل المتباينة :

$٢س + ٣ص \geq ١٢$

رسم $٢س + ٣ص = -١٢$ متصلاً

س	٠	-٣
ص	-٤	٠

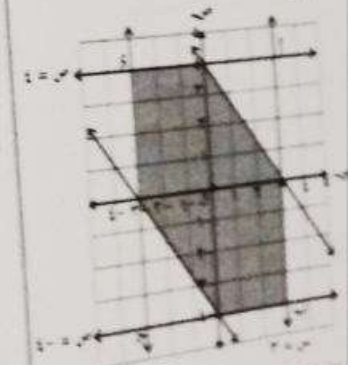
$(٠،٠) \in$ مجموعة حل المتباينة :

$٢س + ٣ص \leq -١٢$

نقطة تقاطع المستقيمان :

$٢س + ٣ص = ١٢$ ، $٢س + ٣ص = -١٢$

هو ⊕



الشكل المضاعس هو مجموعة حل

المتباينات ، رؤوس مضلع الحل هى :

$(٣ ، ٠)$ ، $(٣ ، -٤)$ ، $(٠ ، -٤)$

$(-٣ ، ٠)$ ، $(-٣ ، ٤)$ ، $(٠ ، ٤)$

$ر(٣ ، ٠) = ٣ + ٠ - ٥ = -٢$

$ر(٣ ، -٤) = ٣ - ١٢ - ٥ = -١٤$

$ر(٠ ، -٤) = ٠ - ١٢ - ٥ = -١٧$

أصغر قيمة

$ر(-٣ ، ٠) = -٣ - ٥ = -٨$

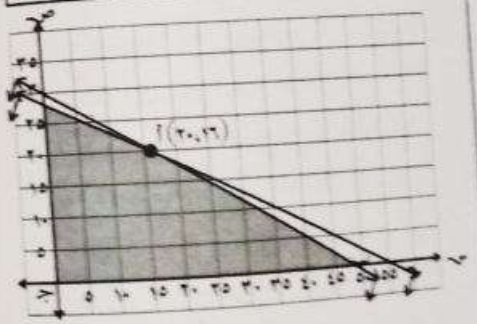
$ر(-٣ ، ٤) = -٣ + ١٢ - ٥ = ٤$

$ر(٠ ، ٤) = ٠ + ١٢ - ٥ = ٧$ أكبر قيمة

إرشادات تمارين (٥)

(١)

النوع / المتطلبات	زيوت طلاء	الورنيش	المتاح
ماكينة أ	$\frac{٥}{٢}$	٤	١٢٠
ماكينة ب	$\frac{٥}{٢}$	٥	١٤٠
العدد المفترض	س	ص	
الربح	٣	٥	



• دالة الهدف : $ر(س ، ص) = ٣س + ٥ص$

الحدود $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$

$\frac{٥}{٢}س + ٢ص \geq ١٢٠$ ، $\frac{٥}{٢}س + ٥ص \geq ١٤٠$

بحل المعادلتين معاً : $س = ١٦$ ، $ص = ٢٠$

رسم المعادلتين كما بالشكل

رؤوس مضلع الحل هى $(٠،٠)$ ، $(٢٨ ، ٠)$ ،

$= ١٠٠ + ٤٨ = ١٤٨$

$= ٠ + ٤٨ \times ٣ = ١٤٤$

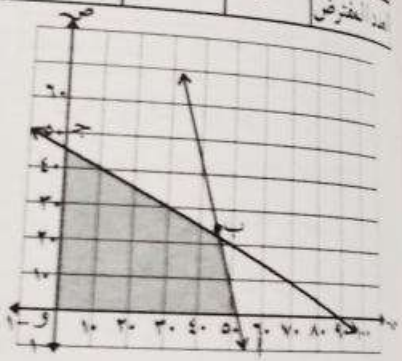
$= ٠ + ٢٨ \times ٥ = ١٤٠$

أكبر قيمة عند $(١٦ ، ٢٠)$

عدد علب زيوت الطلاء = ١٦ ،

عدد علب الورنيش = ٢٠

النوع / المتطلبات	سفرة	مطبخ	المتاح
ماكينة أ	١	٢	٩٠
ماكينة ب	٣	١	١٥٠
الربح	٢٠٠	١٠٠	
العدد المفترض	س	ص	



دالة الهدف :

$ر(س ، ص) = ٢٠٠س + ١٠٠ص$

الحدود $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$ ، $س + ٢ص$

٩٠٢ ، $٣س + ص \geq ١٥٠$

عد رسم المعادلتين :

$س + ٢ص = ٩٠$ ، $٣س + ص = ١٥٠$

عد نقطة التقاطع هى $(٤٢ ، ٢٤)$

$= ٢٠٠ \times ٢ + ٤٢ \times ١٠٠ = ٢٤$

$= ٨٤٠٠ + ٢٤٠٠ = ١٠٨٠٠$

$= ٢٠٠ \times ٥٠ = ١٠٠٠٠$

$= ٠ + ٤٥ \times ١٠٠ = ٤٥٠٠$

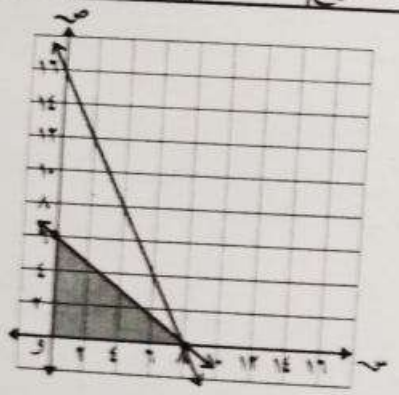
$= ٠$

أكبر قيمة عند $(٤٢ ، ٢٤)$

عدد السفرة = ٤٢ ، عدد المطابخ = ٢٤

(٣)

النوع / المتطلبات	طراز أ	طراز ب	المتاح
الخشب	٢	١	١٦
الساعات	٦	٨	٤٨
ثمن البيع	١٢٠٠	٨٠٠	
العد المقترح	س	ص	



دالة الهدف :

$ر(س ، ص) = ١٢٠٠س + ٨٠٠ص$

الحدود : $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ،

$٢س + ص \geq ١٦$ ، $٦س + ٨ص \geq ٤٨$

بعد رسم المعادلتين نجد أن نقطة

تقاطعهما $(٨ ، ٠)$

رؤوس مضلع الحل هى $(٨ ، ٠)$ ،

ثانيا : حلول حساب المثلثات

تمرين حساب المثلثات (١)

المجموعة (أ) :

(١) [أ] معادلة — [ب] معادلة
[جـ] معادلة — [ء] متطابقة
[هـ] متطابقة — [و] معادلة
[ز] متطابقة

(٢) [أ] $حا^٢\theta + حتا^٢\theta + ٢حا\theta حتا\theta = ١$

$\therefore$ المقدار $= حا\theta \times \frac{١}{حا\theta} = ١$

[ب] $\frac{قا^٢\theta}{قتا^٢\theta} = \frac{١ + طا^٢\theta}{١ + طتا^٢\theta} = طا^٢\theta$

[جـ] $\frac{١}{حا^٢\theta} - \frac{١}{حتا^٢\theta} = \frac{١ - حا^٢\theta}{حتا^٢\theta} = \frac{حتا^٢\theta}{حتا^٢\theta} = ١$

[ء] $حتا(\theta - \frac{\pi}{٢}) = حا\theta$

$\therefore$ المقدار $= قا(\theta - \frac{\pi}{٢}) = قتا\theta = \frac{١}{حا\theta}$

$\therefore$ المقدار $= حا\theta \times \frac{١}{حا\theta} = ١$

[هـ] $\frac{حتا\theta}{حا\theta} = طتا\theta$

[و] $\frac{حا\theta}{حتا\theta} \times \frac{١}{حا\theta} \times حتا\theta = ١$

[ز] $\frac{حتا\theta}{حا\theta} - \frac{حا\theta}{حتا\theta}$

$= \frac{حتا^٢\theta + حا^٢\theta}{حا\theta حتا\theta} = \frac{١}{حا\theta} \times \frac{١}{حتا\theta}$

$= قتا\theta \, قا\theta$

[ح] $\frac{حا^٢\theta}{حا^٢\theta} + \frac{حا^٢\theta}{حتا^٢\theta} = ١ + ١ = ٢$

[ط] $حا\theta \times \frac{١}{حتا\theta} \times \frac{حتا\theta}{حا\theta} + \frac{١}{حا\theta} \times \frac{حا\theta}{حتا\theta}$

$= \frac{حتا\theta}{١} \times \frac{حا\theta}{حتا\theta}$

$= ١ + ١ = ٢$

(٣) [أ] الطرف الأيمن :

$= \frac{قتا^٢\theta}{قا^٢\theta} = \frac{حتا^٢\theta}{طا^٢\theta} = طتا^٢\theta =$ الأيسر

[ب] الطرف الأيمن $= \frac{\frac{حا\theta}{حتا\theta} + \frac{حتا\theta}{حا\theta}}{\frac{١}{حتا\theta} \times \frac{١}{حا\theta}}$

$= حا\theta \, حتا\theta \left(\frac{حا\theta}{حتا\theta} + \frac{حتا\theta}{حا\theta}\right)$

$= حا^٢\theta + حتا^٢\theta = ١ =$ الأيسر

[جـ] الطرف الأيمن $= \left(\frac{١}{حتا\theta} - \frac{حا\theta}{حتا\theta}\right)^٢$

$= \left(\frac{١ - حا\theta}{حتا\theta}\right)^٢$

$= \frac{(١ - حا\theta)^٢}{حتا^٢\theta} = \frac{(١ - حا\theta)^٢}{١ - حا^٢\theta}$

$= \frac{(١ - حا\theta)^٢}{(١ - حا\theta)(١ + حا\theta)}$

$= \frac{١ - حا\theta}{١ + حا\theta} =$ الأيسر

[ء] الطرف الأيمن

$= \frac{١ - حتا^٢\theta - حا^٢\theta + حا^٢\theta \, حتا^٢\theta}{حا^٢\theta / حتا^٢\theta}$

$= \frac{١ - (حتا^٢\theta + حا^٢\theta) + حا^٢\theta \, حتا^٢\theta}{حا^٢\theta / حتا^٢\theta}$

$= \frac{حتا^٢\theta (١ - ١ + حا^٢\theta \, حتا^٢\theta)}{حا^٢\theta}$

$= \frac{حا^٢\theta \, حتا^٤\theta}{حا^٢\theta} = حتا^٤\theta =$ الأيسر

[هـ] الأيمن

$= \frac{حا\theta حتا\theta}{\frac{حا\theta}{حتا\theta}} + \frac{\frac{١}{حتا\theta}}{\frac{١}{حا\theta}}$

$= \frac{حا\theta حتا\theta}{حتا\theta} + \frac{حا\theta حتا\theta \times حا\theta}{حتا\theta}$

$= حتا^٢\theta + حا^٢\theta = ١ =$ الأيسر

المجموعة (ب) :

(١) الأيمن $= \frac{(حتا^٢ جـ - حا^٢ جـ)(حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ)}{جـ}$

$= \frac{(حتا جـ - حا جـ)(حتا جـ + حا جـ)}{جـ}$

$= حتا جـ + حا جـ =$ الأيسر

(٢) الأيمن $= حتا^٢ جـ \, حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ \, حا^٢ جـ$

$= (١ - حا^٢ جـ) \, حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ \, حا^٢ جـ$

$= حتا^٢ جـ - حا^٢ جـ \, حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ \, حا^٢ جـ$

$= حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ \, (-حتا^٢ جـ + ١)$

$= حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ \times حا^٢ جـ$

$= حتا^٢ جـ + حا^٤ جـ =$ الأيسر

(٣) $قتا^٢ جـ + قا^٢ جـ = \frac{١}{حا^٢ جـ} + \frac{١}{حتا^٢ جـ}$

$= \frac{حتا^٢ جـ + حا^٢ جـ}{حا^٢ جـ \, حتا^٢ جـ}$

$= \frac{١}{حا^٢ جـ \, حتا^٢ جـ}$

(٤) الأيمن $=$

$طا^٢ س + طتا^٢ س + ٢ طا س \, طتا س$

$= قا^٢ س - ١ + قتا^٢ س - ١ + ٢$

$= قا^٢ س + قتا^٢ س =$ الأيسر

حيث طا س طتا س $= ١$

$\therefore طا^٢ س = قا^٢ س - ١$

$\therefore طتا^٢ س = قتا^٢ س - ١$

(٥) حا ب طا ب $=$ حا ب $\times \frac{حا ب}{حتا ب}$

$= \frac{حا^٢ ب}{حتا ب} = \frac{١ - حتا^٢ ب}{حتا ب} =$ الأيسر

(٦) الأيمن $= \frac{حتا س}{حا س} + \frac{حا س}{حتا س}$

$= \frac{حتا^٢ س + حا^٢ س}{حا س \, حتا س}$

$= \frac{١}{حا س \, حتا س} = قتا س \, قا س$

(٧) الأيمن $= \frac{١}{طا^٢ أ} + ١$

$= \frac{حتا^٢ أ}{حا^٢ أ} + ١$

$= \frac{حتا^٢ أ + حا^٢ أ}{حا^٢ أ} = \frac{١}{حا^٢ أ}$

(٨) الأيمن $= (١ - طا^٢ جـ)(١ + طا^٢ جـ)$

$= \left(١ - \frac{حا^٢ جـ}{حتا^٢ جـ}\right) قا^٢ جـ$

$= \left(\frac{حتا^٢ جـ - حا^٢ جـ}{حتا^٢ جـ}\right) قا^٢ جـ$

تمرين حساب المثلثات (٢)

المجموعة (أ) :

(١) حا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ و(س) = ٤٥°

∵ حا س موجبة

∴ (س) تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ و(س) = ٤٥°

و(س) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

∴ م . ح = {٤٥° ، ١٣٥°}

(٢) حتا س = $-\frac{١}{٢}$

∵ حتا س سالبة

∴ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ و(س) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

و(س) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٣) ظا٢ س = ٣ ∴ ظا س = ± $\sqrt{٣}$

عندما ظا س = $\sqrt{٣}$

(س) تقع فى الربع الأول أو الثالث

∴ و(س) = ٦٠°

، و(س) = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

عندما ظا س = $-\sqrt{٣}$

(س) تقع فى الثانى أو الرابع

و(س) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

و(س) = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

م . ح = {٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٤) حا س = حتا س بالقسمة على حتا س

ظا س = ١ ∴ ظا س موجبة

∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثالث

∴ و(س) = ٤٥°

(٥) ٢حا س = ظا س × حتا س

بالضرب × حتا س

∴ ٢حا س حتا س = حا س

∴ ٢حا س حتا س − حا س = ٠

∴ حا س (٢حتا س − ١) = ٠

حا س = ٠ أ، ٢حتا س = ١

و(س) = ٠ أ، ١٨٠°

حتا س = $\frac{١}{٢}$

∴ و(س) = ٦٠° أ، ٣٠٠°

م . ح = {٠° ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

(٦) ٢حا س − $\frac{١}{\text{حا س}}$ − ١ = ٠ × حا س

٢حا٢ س − ١ − حا س = ٠

٢حا٢ س − حا س − ١ = ٠

(٢حا س + ١) (حا س − ١) = ٠

عندما حا س = $-\frac{١}{٢}$ ‖ عندما حا س = ١

حا س سالبة ‖ ∴ و(س) = ٩٠°

∴ الزاوية تقع فى الثالث والرابع

∴ و(س) = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

، و(س) = ٣٣٠°

∴ م . ح = {٩٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

(٧) حا٢ س − ٢حتا س + $\frac{١}{٤}$ = ٠

١ − حتا٢ س − ٢حتا س + $\frac{١}{٤}$ = ٠ × −٤

−٤ + ٤حتا٢ س + ٨حتا س − ١ = ٠

٤حتا٢ س + ٨حتا س − ٥ = ٠

(٢حتا س + ٥) (٢حتا س − ١) = ٠

حتا س = $-\frac{٥}{٢}$ ‖ ٢حتا س = ١

ليس لها حل لأن ‖ حتا س = $\frac{١}{٢}$

حتا س ∈ [−١ ، ١] ‖ و(س) = ٦٠° ، ٣٠٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ٣٠٠°}

(٨) ٢حا س = ٤حتا س ∴ ظا س = ٢

∴ و(س) = ٢٦′ ٦٣°

أ، و(س) = ٢٦′ ٢٤٣°

(٩) ٢حتا٢ س − ٥حتا س − ٣ = ٠

(٢حتا س + ١) (حتا س − ٣) = ٠

حتا س = $-\frac{١}{٢}$

حتا س = ٣ ليس لها حل

∴ و(س) = ١٢٠° أ، ٢٤٠°

∴ م . ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(١٠) حا س = ٢ ليس لها حل

لأن المدى حا س = [−١ ، ١]

(١١) ∵ ظا س = −١ ∴ و(س) = ١٣٥°

أ، و(س) = ٣١٥°

∴ م . ح = {١٣٥° ، ٣١٥°}

(١٢) عوض عن حا٢θ بدلالة حتا٢θ

حيث : حا٢θ = ١ − حتا٢θ

∴ ١ − حتا٢θ − حتا٢θ = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ حتا٢θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ حتا٢θ = $\frac{١}{٤}$

∴ حتا θ = ± $\frac{١}{٢}$

عندما حتا θ = $\frac{١}{٢}$ ‖ حتا θ = $-\frac{١}{٢}$

∴ و(θ) = ٦٠° ‖ و(θ) = ١٢٠°

أ، و(θ) = ٣٠٠° ‖ أ، و(θ) = ٢٤٠°

∴ م . ح = {٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°}

$= \left(\frac{\text{حا}^٢\text{جـ} - (١ - \text{حا}^٢\text{جـ})}{\text{حا}^٢\text{جـ}}\right) \text{قا}^٢\text{جـ}$

$= \left(\frac{٢\text{حا}^٢\text{جـ}}{\text{حا}^٢\text{جـ}} - \frac{١}{\text{حا}^٢\text{جـ}}\right) \text{قا}^٢\text{جـ}$

= (٢ − قا٢جـ) قا٢جـ

= ٢قا٢جـ − قا٤جـ

(٩) الطرف الأيمن =

$\frac{(\text{حا س} + \text{حا س حتا س})(\text{حا س} + \text{حا س حتا س} + \text{حتا}^٢\text{س})}{(\text{حا س} + \text{حتا س})}$

$\frac{(\text{حا س} + \text{حا س حتا س})(\text{حا س} + \text{حا س حتا س} + \text{حتا}^٢\text{س})}{(\text{حا س} + \text{حتا س})}$

= ٢حا٢ س + ٢حا٢ س حتا س + حا س حتا س + ٢حا٢ س حتا٢ س

= ٢(حا٢ س + حا٢ س حتا س) + حا س حتا س (١ + حتا س)

= الأيسر

(١٠) الأيمن = $\frac{\text{حا}^٢\text{جـ}}{\text{حا}^٢\text{جـ}} - \frac{\text{حا}^٢\text{ى}}{\text{حتا}^٢\text{ى}}$

$= \frac{\text{حا}^٢\text{جـ حتا}^٢\text{ى} - \text{حا}^٢\text{ى حتا}^٢\text{جـ}}{\text{حتا}^٢\text{جـ حتا}^٢\text{ى}}$

$= \frac{\text{حا}^٢\text{جـ}(١ - \text{حا}^٢\text{ى}) - \text{حا}^٢\text{ى}(١ - \text{حا}^٢\text{جـ})}{(\text{حا}^٢\text{جـ})}$

$= \frac{\text{حا}^٢\text{جـ} - \text{حا}^٢\text{جـ حا}^٢\text{ى} - \text{حا}^٢\text{ى} + \text{حا}^٢\text{جـ حا}^٢\text{ى}}{\text{حا}^٢\text{ى} + \text{حا}^٢\text{جـ حا}^٢\text{ى}}$

$= \frac{\text{حا}^٢\text{جـ} - \text{حا}^٢\text{ى}}{\text{حتا}^٢\text{جـ حتا}^٢\text{ى}}$

(١١) الأيمن = $\frac{\text{حتا ا}}{\text{حا ا}} \times \text{حتا ا} \times \text{حا ا}$

= حتا٢ ا = ١ − حا٢ ا

(٣) ...

المجموعة (ب):

(١) ...

(٢) ...

(٣) ...

(٤) ...

(٥) ٢ حتا θ = √٣

∴ حتا θ = √٣/٢ ∴ و(θ) = π/٦

أ، و(θ) = ٣٣٠° وهي تكافئ −٣٠°

∴ م. ح العام = ± π/٦ + ٢πد

(٦) حتا θ = حتا ٣θ ⇐ حتا ٣θ = حتا θ

∴ ٣θ = ٢πد + π/٢ ± θ

∴ θ = ٢πد + π/٢ أ،

∴ ٢θ = ٢πد + π/٢ أ،

∴ θ = ٢πد/٣ + π/٦

∴ م. ح = ٢πد + π/٢ أ، ٢πد/٣ + π/٦

(٧) حتا θ(حتا θ − ١) = ٠

عندما: حتا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٩٠° أ، ٢٧٠°

∴ الحل العام = π/٢ + πد د ∈ ص

عندما: حتا θ = ١

∴ و(θ) = صفر أ، ٣٦٠°

∴ الحل العام = ٢πد

(٨) ∵ ٢حتا²θ − حتا θ = ٠

∴ حتا θ(٢حتا θ − ١) = ٠

∴ حتا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٠

الحل العام θ = πد

∴ ٢حتا θ = ١ ∴ حتا θ = ١/٢

∴ و(θ) = ٣٠° أ، ١٥٠° = π/٦ أ، ٥π/٦

∴ الحل العام = π/٦ + ٢πد أ، ٥π/٦ + ٢πد

(٩) حا θ(√٢ حتا θ − ١) = ٠

عندما: حا θ = ٠ ∴ و(θ) = ٠ أ، ١٨٠°

∴ الحل العام = πد وعندما حتا θ = ١/√٢

∴ و(θ) = ٤٥° = π/٤

تمرين حساب المثلثات (٣)

(أ) و(أ) = ٣١٥° تكافئ −π/٤

∴ الحل العام = ± π/٤ + ٢πد

حيث د ∈ ص

(ب) و(ب) = ٩٠° − و(جـ)

= ٩٠° − ٥٣° = ٣٧°

ظا ٥٣° = أب/٢٥

∴ أب = ٢٥ × حا ٥٣° ≃ ٢٠ سم

ظا جـ = أب/ب جـ

ظا ٥٣° = ٢٠/ب جـ

∴ ب جـ = ٢٠/ظا ٥٣° ≃ ١٥ سم

(ج) أب = √((أجـ)² − (ب جـ)²)

= √((٢٠)² − (١٣)²) ≃ ١٥,٢ سم

ظا جـ = أب/ب جـ

= ١٥,٢/١٣

∴ و(جـ) = ٤٩° ٢٧′ ٣٩″

∴ و(أ) = ٩٠° − و(جـ)

= ٩٠° − ٤٩° ٢٧′ ٣٩″ = ٤٠° ٣٢′ ٢١″

(د) و(س) = ٩٠° − و(ع)

= ٥٢° ٣٦′

∵ ظا ع = س ص/ص ع

∴ ظا ٣٧° ٢٤′ = ١٥/ص ع

∴ ص ع = ١٥/ظا ٣٧° ٢٤′ = ١٩,٦ سم

(هـ) أب = √((١٨)² + (٢٥)²) ≃ ٣٠,٨ سم

ظا ب = أجـ/ب جـ = ١٨/٢٥

∴ و(ب) = ٣٥° ٤٥′

∴ و(أ) = ٥٤° ١٥′

(و) ∵ أء ⊥ ب جـ

في Δ أء ب فيه:

حا ب = أء/أب

= ٣/٤ ∴ و(ب) = ٤٨° ٣٥′

، و(ف) = ٤١° ٢٥′

في Δ أء جـ فيه:

حا جـ = أء/أجـ = ٣/٥

∴ و(جـ) = ٣٦° ٥٢′

∴ و(أ) = ٥٣° ٨′

∴ و(أ) = و(أ) + و(ف)

= ٩٤° ٣٣′

(ز) من المعطيات و(ب أ ء) = ٦٠°

، و(ء أ جـ) = ٤٠°

، و(ء جـ أ) = ٥٠°

في Δ أء ب فيه: ظا ب = أء/ب ء

∴ ب ء = أء/ظا ب = ١٢/ظا ٣٠°

= ٢٠,٨ سم

حا ٣٠° = أء/أب = ١٢/أب = ١/٢ ⇐

∴ أب = ٢٤ سم

في Δ أ ب جـ : $\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا}}$ ، ط(جـ) = ٥٠°

$\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا}}$ ، $\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا}}$

$\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا}}$ ، $\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا}}$

$\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا}}$

$\frac{12}{\text{جا}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا}}$

أ جـ = ١٥,٧ سم

ب جـ = ب ء + ء جـ

= ٢٠,٨ + ١٠,١ = ٣٠,٩ سم

(٧) من المعطيات Δ أ ب جـ فيه :

أ ب = أ جـ

$\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،

ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

منصف (أ) ∴ ق(ب أ ء) = ٢١°

في Δ ب أ ء : ظا (ب أ ء) = $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$

ظا ٢١° = $\frac{\text{ب ء}}{١٠}$

ب ء = ١٠ ظا ٢١° ≃ ٣,٨ سم

ب جـ = ٢ × ٣,٨ ≃ ٧,٦ سم

(٨) $\overline{\text{أ ظ}}$ ⊥ ... ∴ ق(أ جـ ب) = ٩٠°

Δ أ ب جـ قائم في جـ

جا ٢٧° = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

أ ب = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٢٧°}} = \frac{١٢}{٠,٤٥٣٧}$

= ١٥,٠٢٥٦٢٧٩

$\overline{\text{أ ظ}}$ ... ظ ≃ ٧,٥١ سم

(س ص)² = ١٣٢,٢٥

(س ع)² = ٨٩٤,٠١

(ص ع)² = ٧٦١,٧٦

∴ (س ص)² + (ص ع)² = (س ع)²

= ٨٩٤,٠١ = ٣٠ (س ع)²

∴ المثلث قائم في (ص)

ظا (س) = $\frac{٢٧,٦}{١١,٥}$

∴ ق(س) ≃ ٦٧° ٢٢′ ٤٨″

(١٠) نرسم $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ من خواص الدائرة ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ق(أ م ء) = ١٠٨° ÷ ٢ = ٥٤°

في Δ أ م ء القائم في ء

∴ جا (أ م ء) = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ م}}$

∴ جا ٥٤° = $\frac{\text{أ ء}}{٦}$

∴ أ ء = ٦ جا ٥٤°

= ٤,٨٥٤١٠١٩٦٦

∴ أ ب = ٢ أ ء

∴ أ ب ≃ ٩,٧٠٨ ≃ ٩,٧١ سم

(١١)

جتا ب = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق(ب) = ٥٣° ٧′ ٤٩″

∴ ق(ب أ هـ) = ٩٠ − ٥٣° ٧′ ٤٩″

= ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∴ ق(أ) = ١٢٦° ٥٢′ ١٢″ + ٩٠°

= ١٢٦° ٥٢′ ١٢″

تمرين (٤)

(١) ظا ٥٨° ٢٤′ = $\frac{\text{أ ب}}{٥٠}$

أ ب = ٥٠ ظا ٥٨° ٢٤′

≃ ٨١ م

(٢) ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ظا ٢٥° ١٤′ = $\frac{١٠٠}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ = $\frac{١٠٠}{\text{ظا ٢٥° ١٤′}}$ = ٢١٢,٢ سم

(٣) ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤٥}{٣٨}$

ق(جـ) = ٤٩° ٤٩′ ١٥″

(٤) في Δ أ ب جـ

ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ظا ٧٤° ٣٨′ = $\frac{\text{أ ب}}{٨٠}$

∴ أ ب = ٨٠ ظا ٧٤° ٣٨′ ≃ ٢٩١,١ م

∴ ارتفاع البرج عن سطح الأرض

= أ ب + ب ء = ٢٩١,١ + ١,٧

= ٢٩٢,٨ ≃ ٢٩٣ م

(٥)

في Δ أ ب جـ :

ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ أ ب = ب جـ ظا جـ ..... (١)

في Δ أ ب ء : ظا ء = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$

∴ أ ب = ب ء ظا ء ..... (٢)

من (١) ، (٢) :

ب جـ ظا جـ = ب ء ظا ء

(ب ء + ٥٠٠) ظا جـ = ب ء ظا ء

ب ء ظا جـ + ٥٠٠ ظا جـ = ب ء ظا ء

ب ء ظا ء − ب ء ظا جـ = ٥٠٠ ظا جـ

ب ء (ظا ء − ظا جـ) = ٥٠٠ ظا جـ

∴ ب ء = $\frac{٥٠٠ \text{ ظا جـ}}{\text{ظا ء} - \text{ظا جـ}}$

عوض عن ق(جـ) ، ق(ء)

∴ ب ء = $\frac{٦٤٩,٦٥}{١,٢٣}$ ≃ ٥٢٦,٠٣ م

∴ أ ب = ٥٢٦,٠٣ ظا ٦٨° ٢٨′

≃ ١٣٣٣,١٣ م

(٦)

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ ارتفاع الطائرة

، $\overline{\text{أ جـ}}$ البعد بين الشخص والطائرة .

∵ ظا ٢٥° ١٧′ = $\frac{٨٠٠}{\text{أ جـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{٨٠٠}{\text{ظا ٢٥° ١٧′}}$ ≃ ١٨٧٣ متر

(٧) ظا θ = $\frac{١٨٠}{٣٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ ق(θ) =

٣٠° ٥٧′ ٤٩″

≃ ٠,٥٤°

(٨) بفرض أن ارتفاع الصخرة

هو أ ب

وأن البعد

بين السفينتين

هو جـ ء

ب جـ ظا جـ = ب ء ظا ء

$\frac{٥٠}{\text{جا}\, ٣٨^\circ} =$ ∴ ب جـ

$\frac{٥٠}{\text{جا}\, ٣٨^\circ} =$ ∴ ب جـ

في المثلث أ ب ء : ب ء $= \frac{٥٠}{\text{جا}\, ٥٥^\circ}$

∴ ء جـ = ب جـ − ب ء

∴ ء جـ $= \frac{٥٠}{\text{جا}\, ٣٨^\circ} - \frac{٥٠}{\text{جا}\, ٥٥^\circ} \simeq$ ٢٩ متر

(٩) $\frac{٩٤}{٤٠} =$ ظا θ

∴ ق(θ)

$= ٥٩^\circ\ ١٢'\ ٥٧''$

∴ زاوية ارتفاع الشمس بالراديان

$= \frac{\pi}{١٨٠} \times ٥٩^\circ\ ١٢'\ ٥٧'' \simeq ١,٠٢^ك$

(١٠)

في Δ أ ب ء : ظا ء $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ظا ء}} = \frac{٥٠}{\text{ظا}\, ٩^\circ\ ١٨'}$

في Δ أ ب جـ : ظا جـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ظا جـ}} = \frac{٥٠}{\text{ظا}\, ١٨^\circ\ ٣٦'\ ١٢''}$

∴ جـ ء = ب ء − ب جـ

$= \frac{٥٠}{\text{ظا ء}} - \frac{٥٠}{\text{ظا جـ}} \simeq ٢٢٩$

∴ السرعة $= \frac{\text{ل}}{\text{ن}} = \frac{٢٢٩}{١٥} \simeq ١٥,٣$ م/دقيقة

تمرين (٥) القطاع الدائرى

(١) مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل ر

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$ سم^٢

(٢) ∵ $\frac{١}{٢} \times ٤,٥\, ر^٢ = ٣٦$

∴ ر $= ١٦$ سم

∵ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢} ر^٢\, θ^ك$

∴ $\frac{١}{٢} \times ١٦^٢ \times θ^ك = ٣٦$

∴ $θ^ك = ٠,٢٨١٢٥^ك$ (القياس الدائرى)

∴ س$^\circ = θ^ك \times \frac{١٨٠^\circ}{ط}$

س$^\circ = ٠,٢٨١٢٥ \times \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ١٦^\circ\ ٦'\ ٥٢''$

(٣) ∵ $\frac{١}{٢} \times ٠,٦ \times ر^٢ = ٣٠$

∴ $ر^٢ = ١٠٠$ ∴ ر $= ١٠$ سم

∵ المساحة $= \frac{١}{٢}$ ل ر

∴ $\frac{١}{٢} \times ١٠ \times$ ل $= ٣٠$

∴ ل $= ٦$ سم

(٤) ∵ $\frac{١}{٢} \times ٢٠ \times$ ل $= ٢٠٠$

∴ ل $= ٢٠$ سم

المساحة $= \frac{١}{٢} θ^ك\, ر^٢$

∴ $\frac{١}{٢} θ^ك \times ٤٠٠ = ٢٠٠$

∴ $θ^ك = ١^ك$

∴ س$^\circ = ١^ك \times \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ٥٧^\circ\ ١٧'\ ٤٥''$

(٥) ∵ المساحة $= \frac{١}{٢}$ ل ر

∴ $\frac{١}{٢}$ ل ر $= ٤$

∴ ل ر $= ٨$ ..... (١)

المحيط $= ٢$ ر + ل

∴ $٢ ر + ل = ٨$

∴ ل $= ٨ - ٢$ ر عوض عن ل فى (١)

∴ $(٨ - ٢ ر)$ ر $= ٨$

∴ $٨ ر - ٢ ر^٢ = ٨$

∴ $٢ ر^٢ - ٨ ر + ٨ = ٠$

∴ $ر^٢ - ٤ ر + ٤ = ٠$

∴ $(ر - ٢)^٢ = ٠$

∴ ر $= ٢$ ∴ ل $= ٤$

∵ $θ^ك = \frac{\text{ل}}{ر} = \frac{٤}{٢} = ٢^ك$

س$^\circ = ٢ \times \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ١١٤^\circ\ ٣٥'\ ٣٠''$

(٦) من هندسة الشكل

م ء = ٨ سم

$\frac{٦}{٨} =$ ظا (أ م ء)

∴ ق(أ م ء)

$= ٣٦^\circ\ ٥٢'\ ١١''$

∴ قياس الزاوية المركزية للقطاع الأصغر الذى وتره $\overline{\text{أ ب}}$ هى $٧٣^\circ\ ٤٤'\ ٢٣''$

∵ مساحة القطاع $= \frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠^\circ} \times$ مساحة الدائرة

∴ مساحة القطاع $= \frac{٧٣,٧٤^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ط \times ١٠٠ = ٦٤,٣٥$ سم^٢

(٧) محيط القطاع $= ٦٤$ ∴ $٢ ر + ل = ٦٤$

∴ ل $= ٦٤ - ٢$ ر

∴ ل $= ٦٤ - ٢ \times ٢١ = ٢٢$ سم

∵ $θ^ك = \frac{\text{ل}}{ر} = \frac{٢٢}{٢١} = ١,٠٤٨^ك$

∴ س$^\circ = ١,٠٤٨ \times \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ٦٠^\circ\ ١'\ ٢٦''$

∴ المساحة $= ٢٣١$ سم^٢

(٨) ∵ المساحة $= \frac{١}{٢}$ ل ر

∴ $\frac{١}{٢} \times ١٦ ر = ٤٨$ ∴ ر $= ٦$ سم

∵ $θ^ك = \frac{\text{ل}}{ر} = \frac{٢}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}^ك$

∴ س$^\circ = ٢\frac{٢}{٣} \times \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ١٥٢^\circ\ ٤٧'\ ١٩''$

(٩)

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس عند ب

∴ $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(م) $= ٩٠^\circ - ٣١^\circ\ ١٣' = ٥٨^\circ\ ٤٧'$

وهى قياس الزاوية المركزية للقطاع م ء ب

∵ مساحة الجزء المظلل المطلوب =

مساحة Δ أ ب م − مساحة القطاع م ء ب

∵ ظا $٣١^\circ\ ١٣' = \frac{\text{م ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م ب}}{١٣,٢}$

∴ م ب $\simeq ٨$ سم $= ر$

مساحة Δ أ م ب $= \frac{١}{٢} \times ١٣,٢ \times ٨$

$\simeq ٥٢,٨$ سم^٢

مساحة القطاع م ء ب =

$\frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ط\, ر^٢ = ٣٢,٨$ سم^٢

حيث س$^\circ = ٥٨^\circ\ ٤٧'$ ، ر $= ٨$ سم

∴ مساحة الجزء المظلل المطلوب =

$٥٢,٨ - ٣٢,٨ \simeq ٢٠$ سم^٢

تمرين (٦) القطعة الدائرية

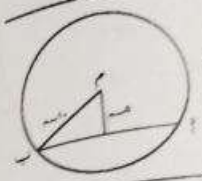
(١) $θ^ك = \frac{١٢٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ٢,٠٩٤٣٩^ك$

حا $١٢٠^\circ = ٠,٨٦٦٠٢٥$

∴ مساحة القطعة الدائرية =

(٥) مثل رقم (٤)

المساحة = ٦١,٤ سم²



(٦) و(أ) = ٦٠°

∴ و(م) = ١٢٠°

∴ المساحة

= ٦١,٤ سم²

وهى معلومات (٤) ، (٥)

(٧) من هندسة الشكل أ ب = ١٠ سم

لأن و(أ ج ب) = ٩٠°

∴ ع = ٥ سم

فى Δ ج أ ب :

ظ (ج أ ب) = $\frac{٨}{٦}$

∴ و(ج أ ب) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

فى Δ م أ ج فيه : م أ = م ج = ع

∴ و(أ ج م) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ و(أ م ج) = ١٨٠° − ٣٦° ١٥′ ١٠٦°

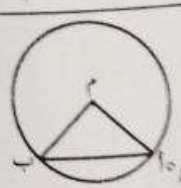
= ٧٣° ٤٤′ ٢٣″

وهى قياس الزاوية المركزية للقطعة التى وترها أ ج

حـ (أ م ج) = ٠,٩٦ ، θ° = ١,٢٩°

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ ع² (θ° − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ (١,٢٩ − ٠,٩٦) ≃ ٤,١ سم²



(٨) θ° = $\frac{ل}{ع}$ = $\frac{٢١}{١٤}$

θ° = ١,٥

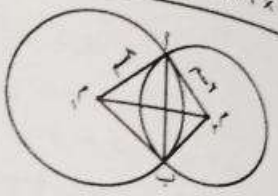
و(θ) = ٨٥° ٥٦′ ٣٧″

حـ ق = ٠,٩٩٧٤٩٤

(١) مساحة القطعة =

$\frac{١}{٢}$ × ١٩٦ (١,٥ − ٠,٩٩٧٤٩٤)

≃ (٠,٥٠٢٥٠٦ × ٩٨) ≃ ٤٩ سم²



∴ ا م = ٦ سم ، أ م = ٨ سم

، م م = ١٠ سم

∴ و(م أ م) = ٩٠°

مساحة القطعة التى وترها أ ب فى الدائرة م

، ع = ٦ سم

∴ ظ (أ م م) = $\frac{٨}{٦}$

∴ قياس الزاوية المركزية و(أ م ب)

= ٣٦° ١٥′ ١٠٦°

∴ مساحة القطعة =

$\frac{١}{٢}$ × ٣٦ (١,٨٥٤٥ − ٠,٩٦) ≃ ١٦,١٠ سم²

مساحة القطعة التى وترها أ ب فى الدائرة م

، ع = ٨ سم

∴ ظ (م م أ) = $\frac{٦}{٨}$

∴ قياس الزاوية المركزية ٢٣° ٤٤′ ٧٣°

θ° = ١,٢٨٧ ، حا θ = ٠,٩٦

∴ المساحة ١٠,٤٦٤ سم²

∴ مساحة القطعتين = ٢٦,٥٦٤ سم²

إرشادات تمارين (٧) المساحة

(١) مساحة Δ س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٨ حا ٣٨°

≃ ٦٦,٤٩ سم²

(٢) مساحة Δ أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ١٩ حا ٥٦°

≃ ١٩٧ سم²

(٣) مساحة Δ أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٢٠ حا ١١٠°

≃ ٢٢٦ سم²

(٤) مساحة الشكل الرباعى

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ١٨ × حا ٧٧°

≃ ١٣١,٥٤٠ سم²

(٥) مساحة الشكل الرباعى

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ × ٢١ × حا ٥٥° ≃ ٢٥٨ سم²

(٦) مساحة الشكل الرباعى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × ٣٥ × حا ١٢٥° ≃ ٥٧٣ سم²

(٧) مساحة الشكل الرباعى

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ٢٨ × حا ١١٠° ≃ ٢٤١ سم²

(٨) مساحة المسدس

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × (١٥)² × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × (١٥)² × $\frac{١}{ظتا ٣٠°}$ ≃ ١١٦٩ سم²

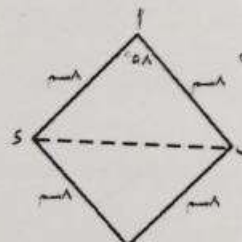
(٩) مساحة المسبع

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × (٢٤)² × ظتا $\frac{\pi}{٧}$ ≃ ٤١٨٦ سم²

(١٠) مساحة المثمن

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × (١٢)² × ظتا $\frac{\pi}{٨}$ ≃ ١٣٩١ سم²

(١١) مساحة المثلث أ ب ء



= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ حا ٥٨°

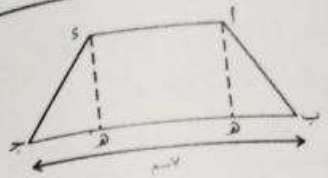
= ٢٧,١٤ سم²

∵ Δ أ ء ب

∴ مساحة المعين = ٢ × ٢٧,١٤
= ٥٤,٢٨ سم٢

(١٢) مساحة المسدس = $\frac{1}{4}$ × ٥ × س٢ × ظا $\frac{\pi}{6}$
٣٨,٥٤ = $\frac{1}{4}$ × ٦ × س٢ × $\frac{1}{\sqrt{3}}$
س٢ = $\frac{4}{3}$ × ٣٧ = ٣٦
∴ س = ٦ متر

(١٣)



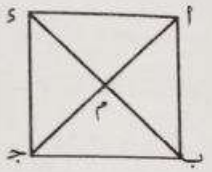
انزل الارتفاع $\overline{أهـ}$ ، $\overline{ءهـ}$
من هندسة الشكل : هـ هـ = ٣ م
، ب هـ = هـ جـ = ٢ م
∴ Δ أب هـ يطابق Δ ء جـ هـ
∴ أهـ = ٢ ظا ٧٥° = ٧,٤٦ م
مساحة شبه المنحرف =
$\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع
= $\frac{1}{2}$(٣ + ٧) × ٧,٤٦ = ٣٧,٢ م٢

ثالثاً : حلول الهندسة التحليلية

إرشادات تمارين (١) الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيم الموجهة

(١) [أ] $\overrightarrow{أب}$ يكافئ $\overrightarrow{ءجـ}$
[ب] $\overrightarrow{بجـ}$ يكافئ $\overrightarrow{أء}$
[جـ] $\overrightarrow{بم}$ يكافئ $\overrightarrow{مء}$
[ء] $\overrightarrow{أم}$ يكافئ $\overrightarrow{مجـ}$

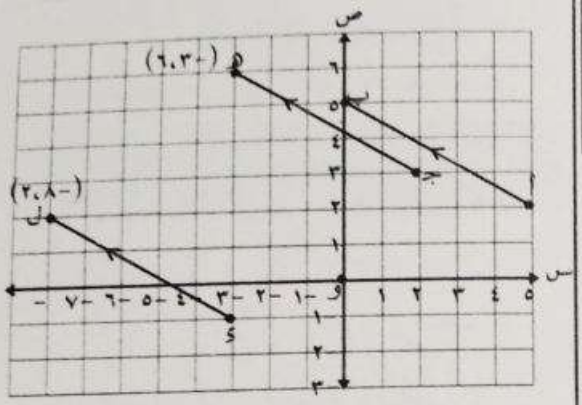
(٢)



$\overrightarrow{أم}$ = $\overrightarrow{مجـ}$
$\overrightarrow{بم}$ = $\overrightarrow{مء}$
$\overrightarrow{أء}$ = $\overrightarrow{بجـ}$
$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءجـ}$

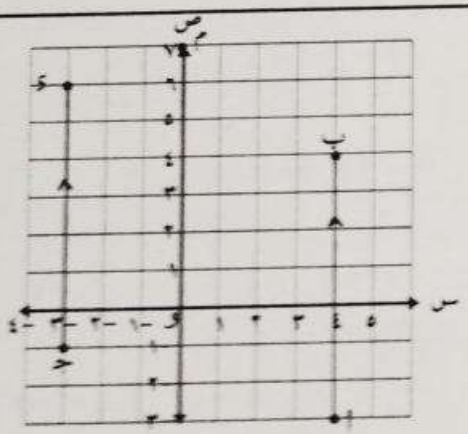
(٣) [أ] $\overrightarrow{أء} \perp \overrightarrow{ءجـ}$ ، $\overrightarrow{مهـ} \perp \overrightarrow{ءجـ}$
∴ $\overrightarrow{أء}$ // $\overrightarrow{مهـ}$ ∵ مهـ = أء
∴ الشكل أ م هـ ء متوازى أضلاع .
[ب] بالمثل $\overrightarrow{مهـ}$ // $\overrightarrow{بجـ}$ ويساويه فى الطول ∴ م ب جـ هـ متوازى أضلاع
[جـ] ∵ الشكل أ م هـ ء متوازى أضلاع
∴ $\overrightarrow{أم}$ // $\overrightarrow{ءهـ}$ ∴ $\overrightarrow{مجـ}$ // $\overrightarrow{ءهـ}$
وينتج أيضاً : $\overrightarrow{ءم}$ // $\overrightarrow{هـجـ}$
لأن الشكل م ب جـ هـ متوازى أضلاع
∴ الشكل م جـ هـ ء متوازى أضلاع
[ء] $\overrightarrow{مهـ}$ = $\overrightarrow{أء}$ = $\overrightarrow{بجـ}$
[هـ] $\overrightarrow{ءهـ}$ = $\overrightarrow{أم}$ = $\overrightarrow{مجـ}$
[و] $\overrightarrow{بم}$ = $\overrightarrow{مء}$ = $\overrightarrow{جـهـ}$

(٤) ∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$
= (٥ ، ٠) − (٢ ، ٥)
= (−٣ ، ٥)
∵ $\overrightarrow{جـهـ}$ = $\overrightarrow{أب}$



∴ $\overrightarrow{هـ}$ = $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{جـ}$
= (−٥ ، ٣) + (٢ ، ٣)
= (−٣ ، ٦)
∵ $\overrightarrow{ءل}$ = $\overrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ل}$ − $\overrightarrow{ء}$ = $\overrightarrow{أب}$
∴ $\overrightarrow{ل}$ = $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ء}$
= (−٥ ، ٣) + (−٣ ، −١)
= (−٨ ، ٢)

(٥)



لاحظ أن : $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$
= (٤ ، ٤) − (−٣ ، ٤) = (٧ ، ٠)
∴ ء = (−٣ ، ٦) ، م = (٧ ، ٠)
، هـ = (−٧ ، ٠)

(٦) أولاً :
[أ] ‖ $\overrightarrow{سص}$ ‖ = ‖ $\overrightarrow{عس}$ ‖ (✓)

إرشادات تمارين (٢)
مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

(١) أولا: $\overrightarrow{ب ت} = ت - ب = (٥، ٢-) - (٢-، ١-) = (٣، ١-)$

$\overrightarrow{ج ح} = ح - ج = (١١، ٠) - (٣، ٠) = (٨، ٠)$

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{ج ح} =$

$(٣، ٠) + (٥، ٢-) - (١١، ٠) =$

$(٨-، ١) =$

$\frac{١}{٢}(\overrightarrow{ب ت} + \overrightarrow{ج ح}) = \frac{١}{٢}[(٥، ٢-) + (١١، ٠)]$

$= \frac{١}{٢}(١٦، ٢-) = (٨، ١-)$

ثانيا: نفرض أن: $ك_١، ك_٢ \in ح$

$\overrightarrow{ج ح} = ك_١ \overrightarrow{أ ب} + ك_٢ \overrightarrow{ب ت}$

$(١١، ٠) = ك_١(٣، ٢-) + ك_٢(٥، ٢-)$

$\therefore ٣ك_١ + ٥ك_٢ = ١١$ ..... (١)

$\therefore ٢-ك_١ + ٢-ك_٢ = ٠$

$\therefore ك_١ + ك_٢ = ٠$

$\therefore ك_١ = -ك_٢$

$\therefore -٣ك_٢ + ٥ك_٢ = ١١$

$\therefore ٢ك_٢ = ١١$

$\therefore ك_٢ = \frac{١١}{٢}$ ، $ك_١ = -\frac{١١}{٢}$

$\therefore \overrightarrow{ج ح} = -\frac{١١}{٢}\overrightarrow{أ ب} + \frac{١١}{٢}\overrightarrow{ب ت}$

(٢) $٢\overrightarrow{أ ب} = ٢(٢، ٢-) = (٤، ١٢-)$

$-\overrightarrow{ب ت} = (٢، ٥-)$

$\frac{١}{٢}\overrightarrow{ج ح} = \frac{١}{٢} \times (١٤، ٦-) = (٧، ٣-)$

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{ج ح}$

$= (٢، ٦-) + (٥، ٢-) - (١٤، ٦-)$

$= (١٥، ٦-)$

$\overrightarrow{ج ح} = ك_١ \overrightarrow{أ ب} + ك_٢ \overrightarrow{ب ت}$

$(١٤، ٦-) = ك_١(٢، ٦-) + ك_٢(٥، ٢-)$

$-٦ = ٢ك_١ - ٢ك_٢$ بالقسمة على (٢)

$-٣ = ك_١ - ك_٢$ ..... (١)

$\therefore ١٤ = -٦ك_١ + ٥ك_٢$ ..... (٢)

$\therefore ك_١ = ١$ ، $ك_٢ = ٤$

$\therefore \overrightarrow{ج ح} = \overrightarrow{أ ب} + ٤\overrightarrow{ب ت}$

(٣) $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{٣٦+٤} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$

$\|\overrightarrow{ب ت}\| = \sqrt{١٦+٩} = ٥$

$\because ٢\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ب ت} = ٢(٦، ٢) - (٤، ٣) =$

$(١٢، ٤) - (٤، ٣) = (٨، ١)$

$\therefore \|٢\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ب ت}\| = \sqrt{١+٦٤} = \sqrt{٦٥}$

$٢\overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ب} = ٢(٤، ٣) - (٦، ٢) =$

$(٨، ٦) - (٦، ٢) = (٢، ٤)$

$\|٢\overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠} =$

$٢\sqrt{٥}$

(٤) $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت} = (١، ٣) - (٢، ٣-)$

$= (٤، ١)$

$\therefore$ متجه الموضع المكافئ $= (٤، ١)$

(٥) $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{و ج}$

$\therefore \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت} = \overrightarrow{ج ت} - \overrightarrow{و ت}$

$\therefore (٥، ٣) - (٨، ٣) = \overrightarrow{ج ت}$

$\therefore \overrightarrow{ج ت} = (٢، ٥-)$

(٦) $\overrightarrow{ب ت} = \overrightarrow{ج ت} - \overrightarrow{ب ت}$

$= (٤، ٢-) - (٥، ٣) = (١-، ٥-)$

$٢\overrightarrow{ب ت} = (٢-، ١٠-)$

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت}$

$= (٥، ٣) - (٢، ١) = (٣، ٢)$

$\therefore ٢\overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ب}$

$\therefore \|٢\overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ب}\|$

$= \sqrt{١٤٤+٢٥} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

(٧) متجه الموضع المكافئ $= (١، ٨)$

$\therefore$ متجه الموضع المكافئ $= (١، ٨)$

(٧) $٢\overrightarrow{أ ب} - ٢\overrightarrow{ب ت} + \overrightarrow{ج ت}$

$= ٢(١، ٥) - ٢(٠، ٢-) + (١-، ٠)$

$= (٢، ١٠) + (٠، ٤) + (١-، ٠)$

$= (١، ١٤)$

$\|٢\overrightarrow{أ ب} - ٢\overrightarrow{ب ت} + \overrightarrow{ج ت}\| = \sqrt{١+١٩٦}$

$= \sqrt{١٩٧}$

(٨) $\because \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت}$

$= (٧، ٠) - (١-، ٢-) = (٨، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{ج ت} = \overrightarrow{ج ت} - \overrightarrow{ك ت}$

$= (٨، ٤) - (٠، ٢) = (٨، ٢)$

$\because \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ك ج}$

(٩) $\because \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ك ج}$

$\overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت} = \overrightarrow{ج ت} - \overrightarrow{ك ت}$

$\therefore \overrightarrow{ك ت} = \overrightarrow{ج ت} + \overrightarrow{أ ت} - \overrightarrow{ب ت}$

$= (١-، ٥) + (٨، ٤) - (٥، ٦)$

$= (٢، ٣)$

(١٠) $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت} = (١، ٢) - (١، ٣)$

$= (٢-، ١)$

$\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{١+٤} = \sqrt{٥}$

(١١) $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ت} - \overrightarrow{ب ت}$

$= (٤، ٢-) - (٥، ٣) = (١-، ٥-)$

$٢\overrightarrow{ب ج} = (٢-، ١٠-)$

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ت} - \overrightarrow{أ ت}$

$= (٥، ٣) - (٢، ١) = (٣، ٢)$

$\therefore ٢\overrightarrow{ب ج} - \overrightarrow{أ ب}$

$\therefore \|٢\overrightarrow{ب ج} - \overrightarrow{أ ب}\|$

$= \sqrt{١٤٤+٢٥} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

إرشادات تمارين (٣)
الصور المختلفة للمتجه

(١) $ظا\ \theta = \frac{٤}{٣\sqrt{٤}} = \frac{١}{٣\sqrt{}}$

$\therefore ق(\hat{\theta}) = ٣٠° = \frac{\pi}{٦}$

$\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{٤٨+١٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$

$\therefore$ الصورة القطبية $(٨، \frac{\pi}{٦})$

(٢) $س = ١٢\sqrt{٢}$ جتا $(\frac{\pi ٣}{٤})$

$= ١٢\sqrt{٢}$ جتا $١٣٥°$

$= ١٢\sqrt{٢} \times \frac{-\sqrt{٢}}{٢} = -١٢$

$\therefore ص = ١٢\sqrt{٢}$ جا $\frac{\pi ٣}{٤}$

$= ١٢\sqrt{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ١٢$

$\therefore \overrightarrow{ج ت} = (-١٢، ١٢)$

(٣) $\|\overrightarrow{أ ت}\| = \sqrt{١٦+٩} = ٥$ ،

$\overrightarrow{أ ت} = -٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$

(٤) $\|\overrightarrow{ب ت}\| = \sqrt{١٤٤+٢٥} = ١٣$ ،

$\overrightarrow{ب ت} = ٥\overrightarrow{س} - ١٢\overrightarrow{ص}$

(٥) $\|\overrightarrow{ل ت}\| = \sqrt{٣٦+٩} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

$\overrightarrow{ل ت} = -٣\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}$

(٦) $\|\overrightarrow{ع ت}\| = \sqrt{٤٩} = ٧$ ، $\overrightarrow{ع ت} = -٧\overrightarrow{س}$

(٧) $\|\overrightarrow{ف ت}\| = ٤$ ، $\overrightarrow{ف ت} = ٤\overrightarrow{ص}$

(٨) $\overrightarrow{مـ ت} = (٣\sqrt{٢}، ٣\sqrt{٢})$

$\|\overrightarrow{مـ ت}\| = \sqrt{١٨+١٨} = \sqrt{٣٦} = ٦$

$ظا\ \theta = \frac{٣\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}} = ١$ $\therefore ق(\hat{\theta}) = ٤٥°$

(٩) $\|\overrightarrow{د}\| = \sqrt{٢٥+٢٥} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$

$\tan\theta = \frac{٥}{٥} = ١$

$\therefore \theta(\hat{ق}) = ٤٥° = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \overrightarrow{د} = (\frac{\pi}{٤}\ ،\ ٥\sqrt{٢})$

(١٠) $\|\overrightarrow{ج}\| = \sqrt{٢٧+٩} = \sqrt{٣٦} = ٦$

$\tan\theta = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

$\therefore \theta(\hat{ق}) = ٦٠° = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore \overrightarrow{ج} = (\frac{\pi}{٣}\ ،\ ٦)$

(١١) $٢\overrightarrow{ب} = ٢(٥،-٢) = (١٠،-٤)$

$= -٤\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ج}٣ = ٣(١١،٠) = (٣٣،٠)$

$= ٣٣\overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ج}$

$= (٣،-٢) + (٥،-٢) + (٠،-١١)$

$= (٨،١) = \overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$

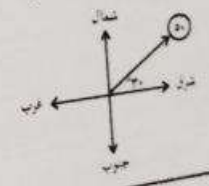
$\frac{١}{٢}(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}) = (-١،٨)$

$= -\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$

(١٢) $\overrightarrow{أ} = -٦٠\overrightarrow{ص}$

(١٣) $\overrightarrow{ب} = ٥٠حتا٣٠\overrightarrow{س} + ٥٠حا٣٠\overrightarrow{ص}$

$= ٢٥\sqrt{٣}\overrightarrow{س} + ٢٥\overrightarrow{ص}$



(١٤) $\overrightarrow{ج} = -٤٠حتا٤٥\overrightarrow{س} + ٤٠حا٤٥\overrightarrow{ص}$

$= -٢٠\sqrt{٢}\overrightarrow{س} + ٢٠\sqrt{٢}\overrightarrow{ص}$

إرشادات تمارين (٤)
توازى متجهين وتعامدهما

(١) $\overrightarrow{أ} = (٣،-٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٦،١٠)$

$\because$ س١ص٢ − س٢ص١ = ٣ × ١٠ − −٥ × −٦

= صفر

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان .

(٢) $\because$ س١ص٢ − س٢ص١ = ٤ × ٢ − ٢ × ٨

= صفر

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان .

(٣) $\because$ ٣ × ٢ − −٢ × −٣ = صفر

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان .

(٤) $\because$ س١ص٢ − س٢ص١

= −١٠ × −٨ − ٦ × ٢٤ = −٦٤ ≠ ٠

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير متوازيين .

(٥) $\because$ س١س٢ + ص١ص٢

= ٢ × −٦ + ٤ × ٣ = ٠

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان .

(٦) $\because$ س١س٢ + ص١ص٢

= −٦ × ٤ + ٣ × ٨ = صفر

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان .

(٧) $\because$ س١س٢ + ص١ص٢

= −٢ × ٢ + ١ × −٢ = −٦ ≠ ٠

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير متعامدين .

(٨) $\because \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج} = (٤،٦)$

$\because$ س١ص٢ − س٢ص١

= ٢ × ٦ − ٤ × ٣ = صفر

$\therefore$ المتجهان $(\overrightarrow{أ})$ ، $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج})$ متوازيان

(٩) $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج} = (-٤،٢)$

$\because$ س١س٢ + ص١ص٢

= ٢ × −٤ + ٤ × ٢ = صفر

$\therefore$ المتجهان $(\overrightarrow{أ})$ ، $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج})$ متعامدان

(١٠) $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}$

$= ٢(١،٢) + ٣(٣،٢)$

$= (٢،٤) + (٩،٦) = (١١،١٠)$

شرط التوازى : س١ص٢ − س٢ص١

= ١١ × −١٠ − −١١ × ١٠ = صفر

$\therefore (٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب})$ ، $\overrightarrow{ج}$ متوازيان

(١١) $\because \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (٣،\frac{٣}{٥})$

، $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج} = (\frac{٨}{٥}،٨)$

شرط التوازى : س١ص٢ − س٢ص١

$= \frac{٣}{٥} \times ٨ - ٣ \times \frac{٨}{٥}$ = صفر

$\therefore (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ ، $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج})$ متوازيان

(١٢) شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

$\therefore$ ٢ × ٣ + ك × −١ = ٠ $\therefore$ ك = ٦

(١٣) $\because$ س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

$\therefore$ ك × ك + ٨ × −٢ = ٠

$\therefore$ ك^٢ = ١٦ $\therefore$ ك = ±٤

(١٤) شرط التوازى : س١ص٢ − س٢ص١

$\therefore$ ٣ × ٢ − ك × −١ = ٠ $\therefore$ ك = −٦

(١٥) س١ص٢ − س٢ص١ = ٠

٢ × ك − صفر × ٥ = ٠ $\therefore$ ك = ٠

(١٦) شرط التوازى : − ك × ك − ١ × −٤ = ٠

−ك^٢ + ٤ = ٠ $\therefore$ ك^٢ = ٤

$\therefore$ ك = ±٢

(١٧) شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

$\therefore$ ١ × ٣ − ٢ × ك = ٠ $\therefore$ ٢ك = ٣

$\therefore$ ك = $\frac{٣}{٢}$

(١٨) $\because \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٣،٤) - (٢،-١)$

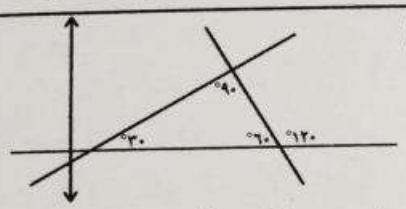
$= (١،٥)$

شرط التوازى : س١ص٢ − س٢ص١ = ٠

$\therefore$ ك × ٥ − ١ × ١٥ = ٠

$\therefore$ ٥ك = ١٥ $\therefore$ ك = ٣

(١٩)



واضح من الرسم أن المتجهين متعامدان

لكن $\overrightarrow{أ}$ = (٦حتا ٣٠ ، ٦ حا٣٠°)

= (٣ ، ٣√٣)

$\because \overrightarrow{ب}$ = (٤حتا١٢٠° ، ٤حا١٢٠°)

= (−٢ ، ٢√٣)

$\because$ شرط التعامد : س١س٢ + ص١ص٢ = ٠

$\therefore$ ٣√٣ × −٢ + ٣ × ٢√٣ = صفر

$\therefore$ المتجهان متعامدان .

(٢٠) واضح أنهما متوازيان لأن الزاوية واحدة .

$\overrightarrow{أ}$ = (٢√٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣√٣ ، ٣)

شرط التوازى : س١ص٢ − س٢ص١ = ٠

$\therefore$ ٢√٣ × ٣ − ٣√٣ × ٢ = صفر

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان .

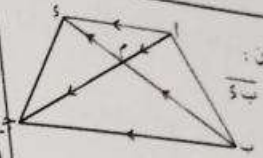
إرشادات تمارين (٥)
العمليات على المتجهات

(١) $\because$ ب ج = ٣ أ د

$\therefore$ ب ج // أ د ، ب ج = ٣ أ د

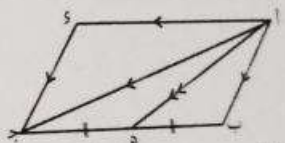
$\therefore$ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

$\therefore$ الشكل شبه منحرف



نفرض أن :
$\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$
$\therefore$ م منتصف كل من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$
في Δ أ م ء :
$\therefore \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{أء}$ ..... (١)
في Δ ب م جـ :
$\therefore \overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{بجـ}$ ..... (٢)
بجمع (١) ، (٢)
$\therefore \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} + \overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ}$
$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ}$ ..... (٣)
$\because \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{أجـ}$
، $\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{بء}$
$\because \overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{أء}$ $\therefore$ (٣) تصبح
$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء} + ٣\overrightarrow{أء} = ٤\overrightarrow{أء}$

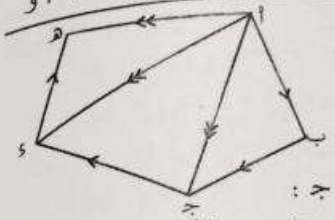
(٢)



في Δ أ ب جـ : هـ منتصف $\overline{بجـ}$
$\therefore ٢\overrightarrow{أهـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ}$ ..... (١)
في Δ أ جـ ء : $\because \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{أجـ}$
من (١) ، (٢)
$٢\overrightarrow{أهـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ}$

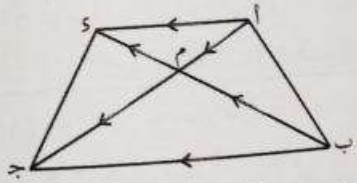
(٣) في Δ أ جـ ء :
$\because \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أء}$ ..... (١)
في Δ أ ء هـ :
$\because \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـء} = \overrightarrow{أء}$ ..... (٢)
من (١) ، (٢) بالجمع
$\therefore ٢\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـء}$
..... (٣)

(٤)



في Δ أ ب جـ :
$\because \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$ .... (١)
في Δ أ جـ ء :
$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أء}$ ..... (٢)
في Δ أ ء هـ :
$\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{أهـ}$ ..... (٣)
من (١) ، (٢) ، (٣) نجد بالجمع :
$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءهـ}$
$= \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{أهـ}$
$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{أهـ}$
بإضافة $\overrightarrow{هـأ}$ للطرفين حيث $\overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{هـأ} = \vec{٠}$
$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـأ} = \vec{٠}$

(٥) نفرض أن $\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$

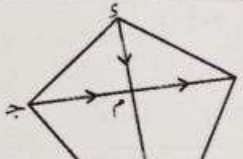


في Δ أ م ء : $\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{أء}$ .... (١)
في Δ ب م جـ :
$\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{بجـ}$ .... (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
$\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} + \overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ}$
$\therefore \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ}$

$\because \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أو}$ ، $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{هـء}$ ..... (٤)
من (٤) عوض في (٣)
$\therefore ٢\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{أو}$

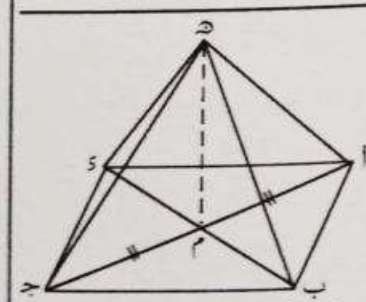
ثانيًا : في Δ أ ب ء :
$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء}$ ..... (١)
في Δ أ جـ ء :
$\therefore \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{أجـ}$ ..... (٢)
من (١) ، (٢) بالطرح
$\therefore \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بء} - \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{أجـ}$
$\therefore \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{ءجـ} = ٢\overrightarrow{أء} - \overrightarrow{أجـ} - \overrightarrow{بء}$
$= ٢\overrightarrow{أء} - (\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء})$
ومن المطلوب الأول :
$\therefore \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{ءجـ} = ٢\overrightarrow{أء} - \frac{٧}{٢}\overrightarrow{أء}$
$= -\frac{٣}{٢}\overrightarrow{أء} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{ءأ}$
$\therefore ٢\overrightarrow{أب} - ٢\overrightarrow{ءجـ} = ٣\overrightarrow{ءأ}$

(٦) في Δ أ م ء :



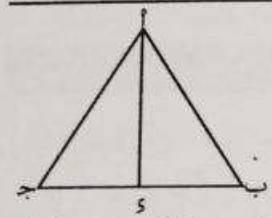
$\overrightarrow{ءم} + \overrightarrow{مأ}$
$= \overrightarrow{ءأ}$ .... (١)
في Δ م ب جـ :
$\overrightarrow{جـم} + \overrightarrow{مب} = \overrightarrow{جـب}$ ..... (٢)
من (١) ، (٢) بالجمع
$\overrightarrow{ءم} + \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{جـم} + \overrightarrow{مب} = \overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{جـب}$
$\therefore \overrightarrow{ءب} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{جـب}$
$\therefore \overrightarrow{ءب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{ءأ} - \overrightarrow{بجـ}$

(٧) القطران ينصف كل منهما الآخر .



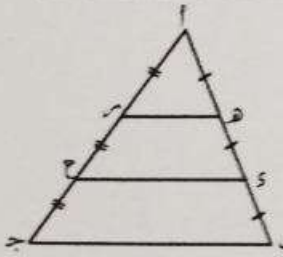
ثانيًا : صل $\overline{هـم}$
في Δ هـ أ جـ :
$\overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{هـجـ} = ٢\overrightarrow{هـم}$ ..... (١)
في Δ هـ ب ء :
$\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـء} = ٢\overrightarrow{هـم}$ ..... (٢)
من (١) ، (٢)
$\overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{هـجـ} = \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـء}$
(المطلوب ثانيًا)

(٨) في Δ أ ب ء :



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بء}$
$= \overrightarrow{أء}$ .... (١)
بالضرب × ٢
$\therefore ٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{بء} = ٢\overrightarrow{أء}$ ..... (١)'
في Δ أ ء جـ :
$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أء}$ .... (٢) بالضرب × ٣
$\therefore ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـء} = ٣\overrightarrow{أء}$ .... (٢)'
من (١)' ، (٢)' بالجمع :
$٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{بء} + ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـء} = ٥\overrightarrow{أء}$
$\because ٢\overrightarrow{بء} = ٣\overrightarrow{ءجـ} = -٣\overrightarrow{جـء}$
$\therefore ٢\overrightarrow{أب} - ٣\overrightarrow{جـء} + ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـء} = ٥\overrightarrow{أء}$
$\therefore ٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ} = ٥\overrightarrow{أء}$

(٩) في Δ أ هـ ر :



$\overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{أر} = \overrightarrow{هـر}$
$\because \overrightarrow{هـأ} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{بأ}$
وفي نفس الاتجاه
$\therefore \overrightarrow{هـأ} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{بأ}$
بالمثل $\overrightarrow{أر} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{أجـ}$
$\therefore \frac{١}{٣}\overrightarrow{بأ} + \frac{١}{٣}\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{هـر}$ .... (١)

بالمثل : $\overrightarrow{د أ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{أ هـ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{أ جـ}$

$\therefore \frac{2}{3}\overrightarrow{ب أ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{د هـ}$ .... (٢)

في Δ أ ب جـ :

$\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{ب جـ}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) بالجمع :

$\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{هـ ب} + \overrightarrow{د هـ}$ .... (٤)

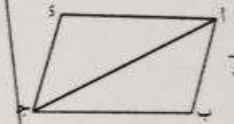
من (٣) ، (٤)

$\therefore \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{هـ ب} + \overrightarrow{د هـ}$

إرشادات تمارين (٦) تطبيقات المتجهات

(١) المعطيات : أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{أ د} \parallel \overrightarrow{ب جـ}$



المطلوب : إثبات أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

المطلوب الأساسي إثبات أن $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{د جـ}$

العمل : نصل $\overrightarrow{أ جـ}$

البرهان : $\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{أ د} \parallel \overrightarrow{ب جـ}$

$\Leftarrow \overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{أ جـ}$

في Δ أ جـ د :

$\therefore \overrightarrow{أ د} + \overrightarrow{د جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$ .... (١)

في Δ أ ب جـ :

$\therefore \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ د} + \overrightarrow{د جـ}$

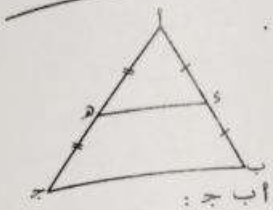
$\therefore \overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{ب جـ}$ $\therefore \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{د جـ}$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{د جـ}$ ، أ ب = د جـ

$\therefore$ الشكل فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

$\therefore$ الشكل متوازي أضلاع

(٢) المعطيات : د ، هـ منتصفي $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$ على الترتيب .



المطلوب : إثبات أن : $\overrightarrow{د هـ} \parallel \overrightarrow{ب جـ}$

البرهان : في Δ أ ب جـ :

$\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{ب جـ}$ .... (١)

في Δ أ د هـ :

$\overrightarrow{د أ} + \overrightarrow{أ هـ} = \overrightarrow{د هـ}$ .... (٢)

$\because \overrightarrow{د أ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{أ ب}$ وهما في اتجاه واحد

يعني متوازيان .

$\therefore \overrightarrow{د أ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب أ}$ بالمثل

، $\overrightarrow{أ هـ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{أ جـ}$ (عوض في ٢)

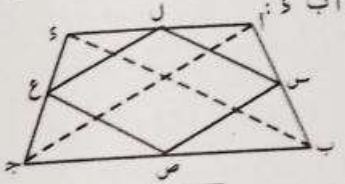
$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{ب أ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{د هـ}$

$\therefore \overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ جـ} = 2\overrightarrow{د هـ}$ ..... (٣)

قارن بين (١) ، (٣) $\therefore \overrightarrow{ب جـ} = 2\overrightarrow{د هـ}$

$\therefore \overrightarrow{ب جـ} \parallel \overrightarrow{د هـ}$ ، ب جـ = 2 د هـ

(٣) في Δ أ ب د :



$\because$ س ، ل منتصفي $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ د}$

$\therefore \overrightarrow{س ل} \parallel \overrightarrow{ب د}$ ، $\overrightarrow{س ل} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب د}$

$\therefore \overrightarrow{س ل} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب د}$ .... (١)

بالمثل يمكن إثبات أن :

$\overrightarrow{ص ع} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب د}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overrightarrow{س ل} = \overrightarrow{ص ع} \Leftarrow$ س ل = ص ع

$\therefore \overrightarrow{س ل} \parallel \overrightarrow{ص ع}$

$\therefore$ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

المساوي وتوازي ضلعين في الشكل الرباعي

$\overrightarrow{س ل} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب د}$ ، ص ع = $\frac{1}{2}$ ب د

بالمثل يمكن إثبات أن :

س ص = ل ع = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$\therefore$ محيط س ص ع ل

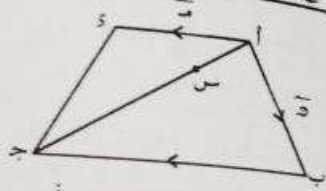
= س ص + ص ع + ع ل + س ل

= $\frac{1}{2}$ أ جـ + $\frac{1}{2}$ ب د + $\frac{1}{2}$ أ جـ + $\frac{1}{2}$ ب د

= أ جـ + ب د

= مجموع قطري الشكل الرباعي أ ب جـ د

(٤)



المعطيات : أ ب جـ د شبه منحرف

$\overrightarrow{أ د} \parallel \overrightarrow{ب جـ}$ ، أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{هـ}$ ، $\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{م}$

المطلوب : أولاً : التعبير بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{هـ}$ عن كل من $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{د جـ}$ ، $\overrightarrow{د ب}$

ثانياً : إذا كان س $\in \overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{أ س} = \frac{1}{3}\overrightarrow{أ جـ}$

أثبت أن النقط د ، س ، ب على استقامة واحدة .

البرهان : $\because \overrightarrow{أ د} \parallel \overrightarrow{ب جـ}$ ، أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$\therefore \overrightarrow{أ د} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب جـ}$ أ، $\overrightarrow{ب جـ} = 2\overrightarrow{أ د}$

$\therefore \overrightarrow{ب جـ} = 2\overrightarrow{م}$ ..... (١)

في Δ أ ب جـ : $\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$

$\therefore \overrightarrow{هـ} + 2\overrightarrow{م} = \overrightarrow{أ جـ}$ ..... (٢)

في Δ أ د جـ : $\because \overrightarrow{أ د} + \overrightarrow{د جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$

$\because \overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{م}$ ومن (٢)

$\therefore \overrightarrow{م} + \overrightarrow{د جـ} = \overrightarrow{هـ} + 2\overrightarrow{م}$

في Δ أ ب د : $\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب د} = \overrightarrow{أ د}$

$\therefore \overrightarrow{هـ} + \overrightarrow{ب د} = \overrightarrow{م}$

$\therefore \overrightarrow{ب د} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{هـ}$ ..... (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) المطلوب أولاً

لإثبات المطلوب الثاني صل $\overrightarrow{د س}$ ، $\overrightarrow{س ب}$

$\therefore$ في Δ أ س د :

$\overrightarrow{أ د} + \overrightarrow{د س} = \overrightarrow{أ س}$ ..... (٥)

$\because \overrightarrow{أ س} = \frac{1}{3}\overrightarrow{أ جـ}$ وهما على خط واحد

$\therefore \overrightarrow{أ س} = \frac{1}{3}\overrightarrow{أ جـ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{هـ} + 2\overrightarrow{م})$

عوض في (٥)

$\therefore \overrightarrow{م} + \overrightarrow{د س} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{هـ} + 2\overrightarrow{م})$

$\therefore \overrightarrow{د س} = \frac{1}{3}\overrightarrow{هـ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{م} - \overrightarrow{م}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{هـ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{م}$

$\therefore \overrightarrow{د س} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{هـ} - 2\overrightarrow{م})$ ..... (٦)

في Δ س ب جـ :

$\overrightarrow{ب س} + \overrightarrow{س جـ} = \overrightarrow{ب جـ}$

$\overrightarrow{ب س} = \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{س جـ}$

$= 2\overrightarrow{م} - \frac{2}{3}\overrightarrow{أ جـ}$

$= 2\overrightarrow{م} - \frac{2}{3}(\overrightarrow{هـ} + 2\overrightarrow{م})$

$= 2\overrightarrow{م} - \frac{2}{3}\overrightarrow{هـ} - \frac{4}{3}\overrightarrow{م}$

$\overrightarrow{ب س} = \frac{2}{3}\overrightarrow{م} - \frac{2}{3}\overrightarrow{هـ}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{م} - \overrightarrow{هـ})$ .... (٧)

من (٦) ، (٧) : $3\overrightarrow{د س} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ب س}$

$\therefore 3\overrightarrow{د س} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ب س}$

$\therefore \overrightarrow{د س} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ب س}$

$\therefore \overrightarrow{د س} \parallel \overrightarrow{ب س}$ وهما مشتركان في نقطة واحدة س

$\therefore$ د ، س ، ب على استقامة واحدة .

إرشادات تمارين (٧)
تطبيقات فيزيائية (محصلة القوى)

(١) $\vec{ح} = ٨\vec{ى}$ (٢) $\vec{ح} = ٨\vec{ى}$

(٣) $\vec{ح} = ٨\vec{ى} - ٢\vec{ى} = ٦\vec{ى}$

(٤) $\vec{ح} = ١٥٠\vec{ى} - ١٠٠\vec{ى} = ٥٠\vec{ى}$

(٥) $\vec{ح} = ٣٠\vec{ى} + ١٥\vec{ى} - ١٠\vec{ى}$
$= ٣٥\vec{ى}$

(٦) $\vec{ح} = ٥\vec{ص} + ١٢\vec{ص}$
$|\vec{ح}| = \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = \sqrt{١٦٩}$
$= ١٣$ نيوتن
$\because$ ظا $\theta = \frac{١٢}{٥}$ $\therefore$ ق$(\theta) =$ ظا$^{-١}(\frac{١٢}{٥})$
$= ٦٧^\circ ٢٢' ٤٩''$

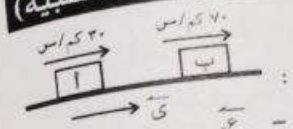
(٧) $\vec{ح} = (٢+٣+١)\vec{ص} + (٤+٣+١)\vec{ص}$
$= ٦\vec{ص} + ٨\vec{ص}$
$|\vec{ح}| = \sqrt{٦٤ + ٣٦} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ ث. كجم
ظا $\theta = \frac{٨}{٦}$
$\therefore$ ق$(\theta) =$ ظا$^{-١}\frac{٨}{٦} = ٥٣^\circ ٨'$

(٨) $\vec{ح} = (-٣+٢+٢)\vec{ص} + (٤+١-١)\vec{ص}$
$\vec{ح} = ٣\vec{ص} + ٤\vec{ص}$
$|\vec{ح}| = \sqrt{٩+١٦} = ٥$ نيوتن
ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$
ق$(\theta) = ٥٣^\circ ٧' ٤٨''$

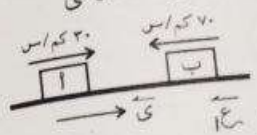
(٩) $\vec{ح} = (٢+٥+٢)\vec{ص} + (٣+١+ب)\vec{ص}$
$= ٧\vec{ص} + (٤+ب)\vec{ص}$
$\vec{ح} = ٥\vec{ص} - ٢\vec{ص}$
$= ٧\vec{ص} + (٤+ب)\vec{ص}$
$٧ + ١ = ٥$ $\therefore$ ا $= -٢$
$-٢ = ٤ + ب$ $\therefore$ ب $= -٦$

ثانيًا : إذا كان : $\vec{ح} = \vec{٠}$
$\therefore ٧ + ا = ٠$ $\therefore$ ا $= -٧$
، $٤ + ب = ٠$ $\therefore$ ب $= -٤$
معنى أن المحصلة $= \vec{٠}$
أن الجسم متزن أو ساكن .

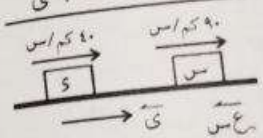
إرشادات تمارين (٨)
تطبيقات فيزيائية (السرعة النسبية)

(١)


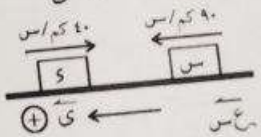
الحالة الأولى :
$\vec{ع_{ا}} = \vec{ع_{ب}} - \vec{ع_{ا}}$
$= ٧٠\vec{ى} - ٣٠\vec{ى} = ٤٠\vec{ى}$



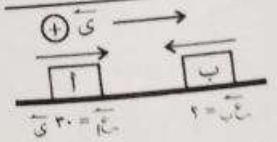
الحالة الثانية :
$\vec{ع_{ا}} = \vec{ع_{ب}} - \vec{ع_{ا}}$
$= -٧٠\vec{ى} - ٣٠\vec{ى} = -١٠٠\vec{ى}$

(٢)


الحالة الأولى :
$\vec{ع_{س}} = \vec{ع_{ى}} - \vec{ع_{س}}$
$= ٤٠\vec{ى} - ٩٠\vec{ى} = -٥٠\vec{ى}$

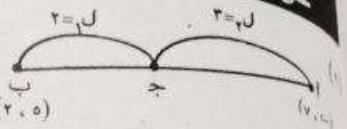


الحالة الثانية :
$\vec{ع_{س}} = \vec{ع_{ى}} - \vec{ع_{س}}$
$= -٤٠\vec{ى} - ٩٠\vec{ى} = -١٣٠\vec{ى}$

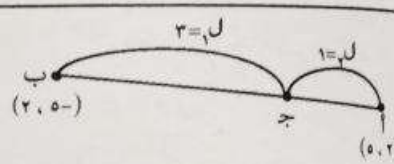
(٣)


$\because \vec{ع_{ا}} = \vec{ع_{ب}} - \vec{ع_{ا}}$
$\therefore -١١٠\vec{ى} = \vec{ع_{ب}} - ٣٠\vec{ى}$
$\therefore \vec{ع_{ب}} = (-١١٠ + ٣٠)\vec{ى}$
$= -٨٠\vec{ى}$
السرعة الفعلية للسيارة = ٨٠ كم/س

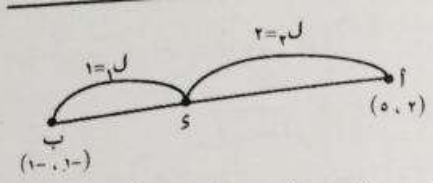
إرشادات الوحدة الخامسة :
الخط المستقيم
إرشادات تمارين (١)
على تقسيم قطعة مستقيم

(١)


$\because \vec{ر_{ا}} = (س_{ا}، ص_{ا}) = (-١، ٧)$
$\because \vec{ر_{ب}} = (س_{٢}، ص_{٢}) = (٢، ٥)$
$\because \vec{ر_{جـ}} = \vec{جـ} = (س، ص)$
$\because \vec{ر} = \frac{ل_{١}\vec{ر_{١}} + ل_{٢}\vec{ر_{٢}}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
$\therefore \vec{ر} = \frac{٢(-١، ٧) + ٣(٢، ٥)}{٢ + ٣}$
، $\vec{ر} = \frac{(٢٠، ١٣)}{٥}$
$\therefore$ نقطة جـ $= (\frac{١٣}{٥}، ٤)$

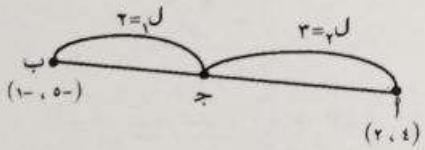
(٢)


$\because \vec{ر_{ا}} = (٢، ٥)$ ، $\vec{ر_{ب}} = (-٥، ٢)$
$\because \vec{ر} = \vec{جـ} = (س، ص)$
$\because \vec{ر} = \frac{ل_{١}\vec{ر_{١}} + ل_{٢}\vec{ر_{٢}}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
$\therefore \vec{ر} = \frac{٣(٢، ٥) + ١(-٥، ٢)}{٣ + ١}$
، $\vec{ر} = \frac{(١، ١٧)}{٤}$
$\therefore$ نقطة جـ $= (\frac{١}{٤}، \frac{١٧}{٤})$

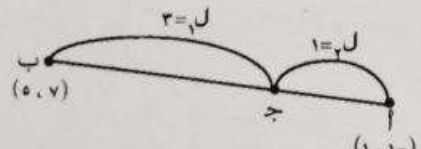
(٣)


$\vec{ر_{ا}} = (٢، ٥)$ ، $\vec{ر_{ب}} = (-١، -١)$
$\because \vec{ر} = \vec{ى} = (س، ص)$
$\because \vec{ر} = \frac{ل_{١}\vec{ر_{١}} + ل_{٢}\vec{ر_{٢}}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
$\therefore \vec{ر} = \frac{٢(-١، -١) + ١(٢، ٥)}{١ + ٢}$
، $\vec{ر} = \frac{(٣، ٠)}{٣} = (١، ٠)$
$\therefore$ نقطة ى $= (١، ٠)$

(٤) $\because$ ٥ أجـ $=$ ٣ أب
$\therefore \frac{أجـ}{أب} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أجـ}{بجـ} = \frac{٣}{٢}$



$\vec{ر_{ا}} = (٤، ٢)$ ، $\vec{ر_{ب}} = (-٥، -١)$
$\because \vec{ر} = \vec{جـ} = (س، ص)$
$\because \vec{ر} = \frac{ل_{١}\vec{ر_{١}} + ل_{٢}\vec{ر_{٢}}}{ل_{١} + ل_{٢}}$
$\therefore \vec{ر} = \frac{٢(٤، ٢) + ٣(-٥، -١)}{٣ + ٢}$
، $\vec{ر} = \frac{(-١، -٧)}{٥} = (\frac{١}{٥}، \frac{-٧}{٥})$
$\therefore$ نقطة جـ $= (\frac{١}{٥}، \frac{-٧}{٥})$

(٥)


$\vec{ر_{ا}} = (-١، ١)$ ، $\vec{ر_{ب}} = (٥، ٧)$

$\overrightarrow{م} = \overrightarrow{جـ} = (س ، ص)$

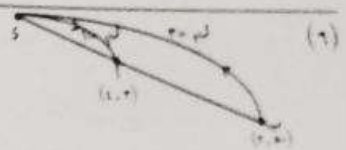
$\overrightarrow{م} = \dfrac{ل_2 \overrightarrow{م_1} + ل_1 \overrightarrow{م_2}}{ل_1 + ل_2}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{(٣-١)١ + (٧،٥)٣}{١ + ٣}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{(٤،٨)}{٤} = (١،٢)$

∴ نقطة جـ = (١، ٢)

(٦)



$\overrightarrow{م_1} = (-٥،٢)$ ، $\overrightarrow{م_2} = (٣،٤)$

$\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ع} = (س ، ص)$

$\dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٣}{-١}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{ل_2 \overrightarrow{م_1} + ل_1 \overrightarrow{م_2}}{ل_1 + ل_2}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{-١(-٥،٢) + ٣(٣،٤)}{-١ + ٣}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{(١٤،١٠)}{٢} = (٧،٥)$

∴ نقطة ع = (٥، ٧)

(٧)

$\overrightarrow{م_1} = (٢،٥)$ ، $\overrightarrow{م_2} = (-٧،٢)$

$\overrightarrow{م} = \overrightarrow{جـ} = (س ، ص)$

$\dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٣}{-١}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{ل_2 \overrightarrow{م_1} + ل_1 \overrightarrow{م_2}}{ل_1 + ل_2}$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{-١(٢،٥) + ٣(-٧،٢)}{-١ + ٣}$

(٨)

بفرض أن (جـ) بينهما بين أ ، ب

$\overrightarrow{م_1} = (٣،-٢)$ ، $\overrightarrow{م_2} = (-٢،٤)$

$\overrightarrow{م} = \overrightarrow{جـ} = (س ، ص)$

$\overrightarrow{م} = \dfrac{ل_2 \overrightarrow{م_1} + ل_1 \overrightarrow{م_2}}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore (٨،-٨) = \dfrac{ل_2(٣،-٢) + ل_1(-٢،٤)}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore (٨،-٨) = \dfrac{(٣ل_2 - ٢ل_1 ، ٢ل_2 + ٤ل_1)}{ل_1 + ل_2}$

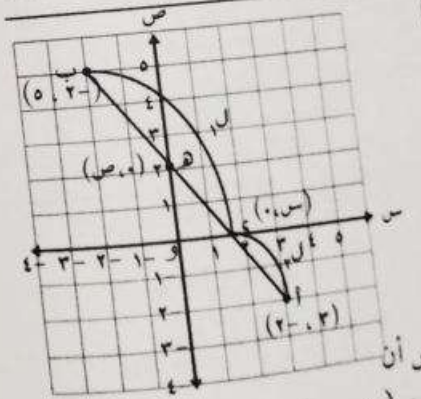
$\dfrac{٣ل_2 - ٢ل_1}{ل_1 + ل_2} = ٨$

$\Leftarrow ٨ل_2 + ٨ل_1 = ٣ل_2 - ٢ل_1$

$\therefore ٥ل_2 = -١٠ل_1$

$\therefore \dfrac{ل_1}{ل_2} = \dfrac{٢}{-١} < ٠$ ∴ التقسيم من الخارج

(٩)



بفرض أن $\overrightarrow{م_1} = (٣،-٢)$ ، $\overrightarrow{م_2} = (-٢،٥)$

أولاً : التقاطع مع محور السينات

ويفرض أن نقطة (ع) بينهما على اعتبار

أن ع = (س ، ٠)

$\therefore ص = \dfrac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore صفر = \dfrac{ل_1 \times -٢ + ل_2 \times ٥}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٢ل_1 = ٥ل_2$ $\therefore \dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٢}{٥} > ٠$

∴ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل

كما هو واضح من الرسم

والنسبة ل$_2$: ل$_1$ = ٢ : ٥

$\therefore س = \dfrac{٥ \times ٣ + ٢ \times -٢}{٥ + ٢} = \dfrac{١١}{٧}$

$\therefore ع = (\dfrac{١١}{٧} ، ٠)$

ثانيًا : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة (هـ) بينهما على اعتبار

أن ع = (٠ ، ص)

$\therefore س = \dfrac{ل_1 \times ٣ + ل_2 \times -٢}{ل_1 + ل_2}$

∴ صفر = ٣ل$_1$ − ٢ل$_2$

$\therefore \dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٣}{٢} > ٠$ ∴ النسبة موجبة

∴ التقسيم من الداخل أيضًا

، والنسبة ل$_2$: ل$_1$ = ٣ : ٢

$\therefore ص = \dfrac{٢ \times -٢ + ٣ \times ٥}{٣ + ٢} = \dfrac{١١}{٥}$

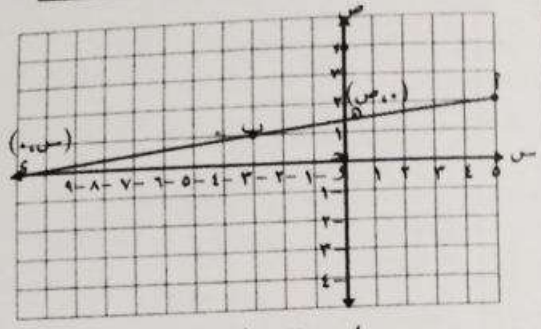
$\therefore هـ = (٠ ، \dfrac{١١}{٥})$

(١٠) أولاً : التقاطع مع محور السينات

ويفرض أن نقطة (ع) = (س ، ٠) وهى

من الداخل تقسم $\overline{أ ب}$

$\therefore ص = \dfrac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_1 + ل_2}$



$\therefore صفر = \dfrac{ل_1 \times ٢ + ل_2 \times ١}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٢ل_1 = -ل_2$ $\therefore \dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٢}{-١} < ٠$

∴ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

$\therefore س = \dfrac{-١ \times ٥ + ٢ \times -٣}{٢ + -١}$

$= \dfrac{-٥ - ٦}{١} = -١١$

∴ ع = (-١١ ، ٠)

ثانيًا : التقاطع مع محور الصادات

ويفرض أن نقطة هـ (٠ ، ص) تقع على

محور الصادات وتقع بينهما .

$\therefore س = \dfrac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore صفر = \dfrac{ل_1 \times ٥ + ل_2 \times -٣}{ل_1 + ل_2}$

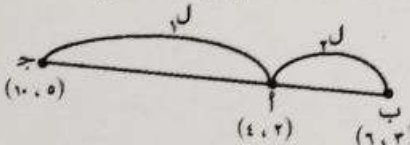
$\therefore ٥ل_1 = ٣ل_2$ $\therefore \dfrac{ل_2}{ل_1} = \dfrac{٥}{٣} > ٠$

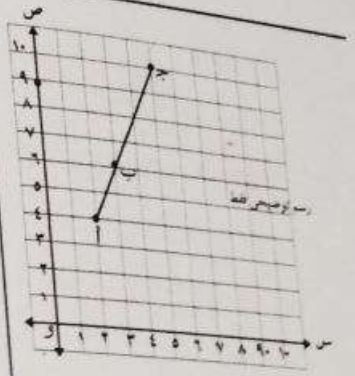
∴ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل

$\therefore ص = \dfrac{٣ \times ٢ + ١ \times ٥}{٥ + ٣} = \dfrac{١١}{٨}$

$\therefore هـ = (٠ ، \dfrac{١١}{٨})$

(١١) بفرض أن التقسيم من الداخل هكذا :





$\therefore س = \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٢ = \frac{ل_1 \times ٣ + ل_2 \times ٥}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٢ل_1 + ٢ل_2 = ٣ل_1 + ٥ل_2$

$\therefore -ل_1 = ٣ل_2 \quad \therefore \frac{ل_2}{ل_1} = \frac{١}{-٣} < ٠$

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

بنسبة ١ : ٣ من جهة نقطة (ب)

ثانياً : نفرض أن التقسيم من الداخل

$\therefore س = \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٣ = \frac{ل_1 \times ٤ + ل_2 \times ٠}{ل_1 + ل_2}$

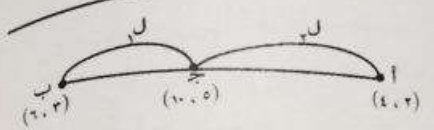
$\therefore ٣ل_1 + ٣ل_2 = ٤ل_1 + ٠ل_2$

$\therefore ل_2 = ٣ل_1 \quad \therefore \frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٣}{١} > ٠$

∵ النسبة موجبة ∴ التقسيم من الداخل

بنسبة ٣ : ١ من جهة نقطة (جـ)

ثالثاً : نفرض الشكل كما يلي :



$\therefore ٥ = س = \frac{ل_1 \times ٢ + ل_2 \times ٣}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٥ل_1 + ٥ل_2 = ٢ل_1 + ٣ل_2$

$\therefore ٣ل_1 = -٢ل_2 \quad \therefore \frac{ل_2}{ل_1} = \frac{٣}{-٢} < ٠$

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

كما هو واضح فى الرسم التوضيحى الأول

وبنسبة ل١ : ل٢ = ٣ : ٢ من جهة نقطة (أ)

(١٢) نقطة تلاقى المتوسطات =

$= \left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{٣} ، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{٣}\right)$

$= \left(\frac{-٤ + ١ + ١}{٣} ، \frac{٢ + -٢ + ٦}{٣}\right)$

$= \left(\frac{-٢}{٣} ، ٢\right)$

(١٣)

نفرض أن جـ تقع بين أ ، ب

يعنى نفرض أن التقسيم من الداخل

$\therefore س = \frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٧ = \frac{ل_1 \times ٣ + ل_2 \times -٥}{ل_1 + ل_2}$

$\therefore ٧ل_1 + ٧ل_2 = ٣ل_1 - ٥ل_2$

$\therefore ٢ل_1 = -٤ل_2 \quad \therefore \frac{ل_2}{ل_1} = \frac{١}{-٣} < ٠$

∵ النسبة سالبة ∴ التقسيم من الخارج

بنسبة ١ : ٣ من جهة نقطة (ب)

∴ قيمة (ص) =

أ، ٣ص = ٢س + ٨ بالقسمة على ٣

$\therefore ص = \frac{٢}{٣}س + \frac{٨}{٣}$ ∴ الميل = $\frac{٢}{٣}$

[ب] الميل = $\frac{-أ}{ب} = \frac{-٤}{٥}$

أ، ٥ص = -٤س + ٢

$\therefore ص = \frac{-٤}{٥}س + \frac{٢}{٥}$ ∴ م = $\frac{-٤}{٥}$

[جـ] م = ٨ ∵ ص - ٨س = ٠

∴ الميل = $\frac{٨ - \times -}{١} = ٨$

[د] م = صفر أ، ص - ٥ = ٠

∴ الميل = $\frac{٠ \times -}{١}$ = صفر

[هـ] م عندما س - ٦ = ٠

∴ الميل = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص} = \frac{-١}{٠}$

∴ الميل غير معرّف

(٩) ∵ ظا هـ = ٠,٧٥ ∴ م = $\frac{٣}{٤}$

∵ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{-٤} = \frac{أ}{٤}$

$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{أ}{٤}$ ∴ أ = ٣

إرشادات تمارين (٣) على معادلة الخط المستقيم المتجهة

(١) $\overleftarrow{ر} = (٢ ، -٣) + ك(٢ ، -١)$ المتجهة

س = ٢ + ٢ك ، ص = -٣ - ك الوسيطيتان

$\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١}$ ،

$\therefore -س + ٢ = ٢ص + ٨$

$\therefore ٢ص + س + ٤ = ٠$

المعادلة الكارتيزية أو الصورة العامة

(٢) م = ظا ٤٥° = ١

$\therefore ص = \frac{-١٠}{-٢} =$

∴ نقطة جـ = (٧ ، ٥)

إرشادات تمارين (٢) مراجعة على معادلة الخط المستقيم

(١) [أ] الميل = $\frac{٢ - ٥}{٣ - -٢} = \frac{٣}{٥-} = \frac{-٣}{٥}$

[ب] الميل = $\frac{٠ - -١}{٤ - ٢} = \frac{١-}{٢-} = \frac{١}{٢}$

[جـ] الميل = $\frac{١ + ٣-}{٧ - ٣} = \frac{٢-}{٤-} = \frac{١}{٢}$

[د] الميل = $\frac{٣ + ٣}{٥ + ١-} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

(٢) شرط التوازى : م١ = م٢ ∴ أ = ٢

(٣) ميل المستقيم الأول = أ ،

ميل المستقيم الثانى

$= \frac{٢ - ٤}{٣ - ٢} = \frac{٢}{١-} = -٢$

∴ أ = -٢

(٤) ص = ٤س + ٧

(٥) م = ظا ٤٥° = ١

∴ معادلة المستقيم : ص = س - ٣

(٦) ص = ٤س + جـ

ويمر بالنقطة (٣ ، ٦) ∴ يحققه

∴ ٦ = ٤ × ٣ + جـ ∴ جـ = -٦

∴ المعادلة : ص = ٤س - ٦

(٧) ميل المستقيم = $\frac{٣ + ٥}{٥ - -٣} = \frac{٨}{٨} = ١-$

∴ معادلة المستقيم : ص = -س + جـ

أى نقطة من النقطتين تحقق المعادلة

∴ -٣ = -٥ + جـ ∴ جـ = ٢

∴ ص = -س + ٢

∴ المعادلة الكارتيزية بدلالة نقطة وميل
$\frac{ص + ٤}{س - ٣} = ١$ ∴ س - ٣ = ص + ٤
∴ ص - س + ٧ = ٠

(٣) [أ] متجه اتجاه $\overleftrightarrow{ل}$ = (١، ٣) - (٤، ٦)
= (-٣، -٣)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٣) + ك(-٣، -٣)
∴ س = ٣ - ٣ك
، ص = ١ - ٣ك الوسيطيتان
∴ $\frac{س - ٣}{-٣} = \frac{ص - ١}{-٣}$
∴ -٣س + ٩ = -٣ص + ٣
∴ ٣س - ٣ص - ٦ = ٠ الكارتيزية
[ب] $\overleftrightarrow{ل}$ = (١، ٠) - (٠، ب) = (١، -ب)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٠) + ك(١، -ب) المتجهة
∴ س = ١ + ك١، ص = -ب ك
الوسيطيتان
∴ $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص}{-ب}$
∴ -بس + اب = ا ص
∴ ا ص + بس - اب = ٠ الكارتيزية
[ج] متجه اتجاه = (٣، ٢) - (٥، ٣)
= (-٣، ٠)
∴ المعادلة المتجهة هي :
$\overrightarrow{ر}$ = (٣، ٢) + ك(-٣، ٠)
الوسيطيتان : س = ٢ - ٣ك
، ص = ٣
∴ المعادلة الكارتيزية هي : ص = ٣
وهي توازي محور السينات
[د] متجه الاتجاه = (١، ١) - (-٢، ١)
= (٣، ٠)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، ١) + ك(٣، ٠) المتجهة

∴ س = ١ ، ص = ١ + ٣ك الوسيطيتان
∴ المعادلة في الصورة العامة : س = ١
وهي توازي محور الصادات .

(٤) $\overleftrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{اب}$ = $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{ا}$
= (٢، ٤) - (١، ٣)
$\overleftrightarrow{ى}$ = (١، ١) ∴ م = $\frac{١}{١}$ = ١
∴ $\frac{ص - ٣}{س - ٢}$ = ١ ∴ ص - ٣ = س - ٢
∴ ص - س - ١ = ٠ الصورة العامة

(٥) $\overrightarrow{ر}$ = (٣، ١) - (٥، ١) = (-٢، ٠)
∴ م = $\frac{٠}{-٢}$ = صفر
∴ المستقيم يوازي محور السينات
ويمر بالنقطة (-١، ٣)
∴ معادلة المستقيم : ص = ٣

(٦) يوازي محور السينات
∴ متجه اتجاه أي مستقيم يوازي محور
السينات = (١، ٠) حيث ا ∈ ح
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٥، ٦) + ك(١، ٠)

(٧) $\overleftrightarrow{ى}$ (متجه اتجاه المستقيم)
= (٤، ٢) - (٠، ٠) = (٤، ٢)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٠) + ك(٤، ٢)
أ، $\overrightarrow{ر}$ = (٤، ٢) + ك(٤، ٢)
ملحوظة : الحل ليس وحيد

(٨) م = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\overleftrightarrow{ى}$ = (٢، ١)
∴ المعادلة المتجهة
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (-١، ٢) + ك(٢، ١)

(٩) ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢}$
∴ معادلة المستقيم = $\frac{ص + ٥}{س - ٣}$ = $\frac{-١}{٢}$

٢س + ١٠ = -س + ٣
∴ ٢س + س + ٧ = ٠
∴ $\frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{٢}{١}$
∴ ص + ٣ = ٢س - ٤
∴ ص - ٢س + ٧ = ٠
∴ (١، ٧) يمر بالمستقيم ∴ يحققه
∴ ٧ - ٢ا + ٧ = ٠
∴ ٢ا = ١٤ ∴ ا = ٧
∴ (٥، ب) يمر بالمستقيم ∴ يحققه
∴ ب - ٢ × ٥ + ٧ = ٠ ∴ ب = ٣

(١١) لاحظ أن :
س = ٣ - ٢ك ، ص = -١ + ٣ك
هي : $\overrightarrow{ر}$ = (٣، -١) + ك(-٢، ٣)
∴ متجه الاتجاه هو (-٢، ٣)
وهو يوازي المستقيم المطلوب :
∴ م = م،
∴ متجه اتجاه المطلوب = (-٢، ٣)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، -١) + ك(-٢، ٣) المتجهة
∴ س = ١ - ٢ك ، ص = -١ + ٣ك
الوسيطيتان
∴ $\frac{س - ١}{-٢} = \frac{ص + ١}{٣}$
∴ ٣س - ٣ = -٢ص - ٢
∴ ٣س + ٢ص - ١ = ٠

(١٢) إذا كان المستقيم يوازي محور الصادات
∴ متجه الاتجاه هو (٠، ب)
∴ المعادلات :
$\overrightarrow{ر}$ = (س، ، ص،) + ك(٠، ب) المتجهة
، س = س، ، ص = ص، + ب ك
الوسيطيتان
∴ المعادلة الكارتيزية : س = س،
ثانيًا : إذا كان يوازي محور السينات
∴ متجه الاتجاه هو (ا، ٠)
∴ المعادلات :
$\overrightarrow{ر}$ = (س، ، ص،) + ك(ا، ٠) المتجهة
، س = س، + ك ا ، ص = ص،
الوسيطيتان
∴ المعادلة الكارتيزية : ص = ص،
ثالثًا : يمر بنقطة الأصل
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٠) + ك(ا، ب) المتجهة
∴ س = ك ا ، ص = ك ب الوسيطيتان
∴ $\frac{س}{ا} = \frac{ص}{ب}$
∴ ب س - ا ص = ٠ الكارتيزية

إرشادات تمارين (٤)
على متجه اتجاه العمود للمستقيم ...

(١) المتجه العمودي (-١، ٢)
∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب
= (٢، ١)
∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٢، -٣) + ك(٢، ١) المتجهة
∴ س = ٢ + ٢ك ، ص = -٣ + ك
الوسيطيتان
$\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ٣}{١}$ ،
∴ س - ٢ = ٢ص + ٦
∴ س - ٢ص - ٨ = ٠ الكارتيزية

(٢) ميل المستقيم المعطى هو م = $\frac{-١}{١}$ = -١
∴ متجه اتجاه المعطى (١، -١)
∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (١، ١)
∴ المعادلات :
$\overrightarrow{ر}$ = (٢، -١) + ك(١، ١) المتجهة

∴ س = ٢ + ك ، ص = -١ + ك

الوسيطيتان

$\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ١}{١}$ ،

∴ س - ص - ٣ = ٠ الكارتيزية

(٣) متجه اتجاه المستقيم المعطى (٤ ، ٣)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٣ ، -٤)

∴ المعادلات :

$\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٧) + ك(٣ ، -٤) المتجهة

∴ س = ٥ + ٣ك ، ص = ٧ - ٤ك

الوسيطيتان

$\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٧}{-٤}$ ،

∴ ٣ص - ٢١ = -٤س + ٢٠

∴ ٤س + ٣ص - ٤١ = ٠ الكارتيزية

(٤) متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٢ ، ٧)

∴ المعادلات :

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك(٢ ، ٧) المتجهة

∴ س = ٢ك ، ص = ٧ك الوسيطيتان

$\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧}$ ،

∴ ٧س - ٢ص = ٠ الكارتيزية

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ بالضرب × ٦

∴ ٣س + ٢ص - ٦ = ٠

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٤} = ١$ بالضرب × ١٢

∴ ٤س - ٣ص - ١٢ = ٠

[أ] بالقسمة على ٩

∴ $\frac{٢س}{٩} - \frac{٥ص}{٩} = ١$

∴ $\frac{س}{\frac{٩}{٢}} + \frac{ص}{\frac{٩}{-٥}} = ١$

∴ الجزءان هما $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{-٩}{٥}$

[ب] بالقسمة على ٨

∴ $\frac{٢س}{٨} - \frac{٥ص}{٨} = ١$

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{\frac{-٨}{٥}} = ١$

∴ الجزءان هما ٤ ، $\frac{-٨}{٥}$

[جـ] ∵ ٢س - ص = ٠

∴ المعادلة لا تقطع المحورين إلا فى نقطة الأصل ، الجزءان صفر ، صفر

[د] ∵ ص = ٣ ، $\frac{ص}{٣} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = صفر

∴ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣

∴ المستقيم يوازى محور السينات .

[هـ] $\frac{س}{٢} = ١$

∴ الجزء المقطوع من محور السينات = ٢ ،

والجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

∴ المستقيم يوازى محور الصادات .

(٨) $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٥} = ١$ بالضرب × ٢٠

∴ ٥س - ٤ص - ٢٠ = ٠

إرشادات تمارين (٥) على قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين

(١) المستقيم الأول متجه الاتجاه = (-٢ ، ١)

∴ $م_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right|$

= $\left|\frac{\frac{١}{٢} - \frac{-١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢}}\right|$

∴ $\frac{-٣}{٤} = م_١$ ، $\frac{١}{٤} = م_٢$

∴ طا هـ = $\left|\frac{\frac{١}{٤} - \frac{-٣}{٤}}{١ + \frac{١}{٤} \times \frac{-٣}{٤}}\right|$ = $\frac{١٦}{١٣}$

∴ ق(هـ) = ٥٠° ٥٤′ ٢٢″

(٥) ∴ $م_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{٢}{٣}$

∴ طا θ = $\left|\frac{\frac{٢}{٣} - \frac{-١}{٢}}{١ + \frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{٢}}\right|$ = $\frac{\frac{٧}{٦}}{\frac{٢}{٣}}$

∴ طا θ = $\frac{٧}{٤}$ ∴ ق(θ̂) = ٦٠° ١٥′ ١٨″

(٦) $م_١ = -١$ ، م محور السينات = صفر

∴ طا هـ = $\left|\frac{٠ - ١}{٠ + ١}\right|$ = ١

∴ ق(هـ) = ٤٥°

∴ $\frac{٤}{٣} = \left|\frac{\frac{-١}{٣} - \frac{٣}{٤}}{\frac{-١}{٣} \times \frac{٣}{٤} + ١}\right|$ = طا هـ

∴ ق(هـ) = ٤٨° ٧′ ٥٣°

∴ $م_١ = \frac{-٤}{٥}$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∴ طا هـ = $\left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right|$

= $\left|\frac{\frac{٢}{٣} - \frac{-٤}{٥}}{١ + \frac{٢}{٣} \times \frac{-٤}{٥}}\right|$ = $\left|\frac{\frac{٢٢}{١٥}}{\frac{٧}{١٥}}\right|$

∴ طا هـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ ق(هـ) = ٧٢° ٢٠′ ٥٩″

(٢) ∴ $م_١ = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{٣}$

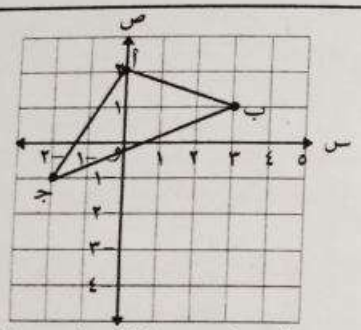
∴ طا هـ = $\left|\frac{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢}}\right|$ = ١

∴ ق(هـ) = ٤٥°

∴ $\frac{٣}{٤} = \left|\frac{٦}{-٨}\right| = \left|\frac{٣ + ٣}{١ + ٣ \times -٣}\right|$ = طا هـ

∴ ق(هـ) = ٣٦° ٥٢′ ١١″

(٨)



∵ (ب جـ)^٢ = (٣ + ٢)^٢ + (١ + ١)^٢

∴ (ب جـ)^٢ = ٢٥ + ٤ = ٢٩

∴ (أ ب)^٢ = (٣ - ٠)^٢ + (١ - ٢)^٢

= ٩ + ١ = ١٠

∴ (أ جـ)^٢ = (٢)^٢ + (٣)^٢

= ٤ + ٩ = ١٣

∴ (ب جـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢

∴ أ زاوية منفرجة

ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٢ - ١}{٣ - ٠} = \frac{-١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ = $\frac{١ + ٢}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ طا أ = $\left|\frac{\frac{٣}{٢} - \frac{-١}{٣}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣}}\right|$ = $\frac{\frac{١١}{٦}}{\frac{١}{٢}}$

∴ طا أ = $\frac{-١١}{٣}$

∴ ق(أ̂) = ١٠٥° ١٥′ ١٨″

(٩) ميل المستقيم الواصل بين النقطتين

م = $\frac{٠ - ١}{١ + ٠} = ١$

∴ طا هـ = ١ ∴ ق(هـ) = ٤٥°

(١٠) ∴ $م_١ = \frac{٣}{٣} = ١$ ، $م_٢ = ٢$

$\therefore$ ظا $\theta = \left|\frac{1-2}{2\times1+1}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $\theta(\hat{ق}) = 18°\,26'\,5''$

(11) ظا $\frac{\pi}{4} = 1$ ، $م_1 = \frac{1-}{ك} = \frac{2}{5}$ ، $م_2 = \frac{3}{5}$

$\therefore \left|\frac{\frac{3}{5}-\frac{1-}{ك}}{\frac{3}{5}\times\frac{1-}{ك}+1}\right| = \left|\frac{\frac{3}{5}-\frac{1-}{ك}}{\frac{3}{5ك}-1}\right| = 1$

$\therefore \frac{\frac{3}{5}-\frac{1-}{ك}}{\frac{3}{5ك}-1} = 1$

عندما $\frac{3}{5}-\frac{1-}{ك} = \frac{3}{5ك}-1$

$\therefore \frac{3}{5}-\frac{1-}{ك} = \frac{3}{5ك}-1$

$\therefore \frac{8-}{5} = \left(\frac{3}{5}-1\right)\frac{1}{ك}$

$\therefore \frac{8-}{5} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{ك}$ $\therefore$ ك $= \frac{1-}{4}$

عندما $\frac{3}{5}-\frac{1-}{ك} = 1-\left(\frac{3}{5ك}-1\right)$

$\therefore \frac{3}{5}+\frac{1}{ك} = \frac{3}{5ك}-1$

$\therefore \frac{3}{5}-1 = \left(\frac{3}{5}+1\right)\frac{1}{ك}$

$\therefore \frac{2}{5} = \frac{8}{5}\times\frac{1}{ك}$ $\therefore$ ك $= 4$

(12) $م_1 = -\frac{2}{1}$ ، $م_2 = \frac{1}{ك}$ $\therefore$ ظا $\theta = 1$ $\therefore \theta = 45°$

$\left|\frac{2-\frac{1-}{ك}}{\frac{1-}{ك}\times2+1}\right| = \left|\frac{2-\frac{1-}{ك}}{\frac{2}{ك}-1}\right| = 1$

$\therefore \frac{2-\frac{1-}{ك}}{\frac{2}{ك}-1} = 1$

عندما $\frac{1-}{ك}-2 = 1$

$\therefore 2-\frac{1-}{ك} = \frac{2}{ك}-1$

$\therefore \frac{1-}{ك} = 2-1$

$\therefore$ ك $= -1$

(13) ق(ب) $= 90°$

$\therefore$ ميل $\overline{أب}\times$ ميل $\overline{بجـ} = -1$

$\therefore \frac{7-ص}{5-1}\times\frac{7-3}{2-5} = -1$

$\therefore \frac{7-ص}{4-}\times\frac{4}{3} = -1$

$\therefore$ ص $- 7 = 3$ $\therefore$ ص $= 10$

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{4}{3}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{3-10}{2-1} = -7$

$\therefore$ ظا$(أ) = \left|\frac{7+\frac{4}{3}}{7-\times\frac{4}{3}+1}\right| = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{25}{3}} = 1$

$\therefore$ ق$(أ) = 45°$

$\therefore$ ق$(جـ) = 45°$ للتأكيد

$\therefore$ ظا$(جـ) = \left|\frac{7+\frac{4}{3}-}{7-\times\frac{4}{3}-1}\right| = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{25}{4}} = 1$

$\therefore$ ق$(جـ) = 45°$

طول العمود $= \frac{|2+2\times4-3-\times3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3$ وحدة طول

طول العمود $= \frac{|2-1\times4-\times3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$ وحدة طول

طول العمود $= \frac{|6-1\times12+1\times5|}{\sqrt{144+25}} = \frac{11}{13}$ وحدة طول

$\frac{|2-3|}{\sqrt{2}} = 1$ وحدة طول

$\frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = 7$ وحدة طول

(7) $\therefore$ س $= 4$ك ، ص $= 2 + 3$ك

$\therefore \frac{س}{4} = \frac{ص-2}{3}$

$\therefore 3س = 4ص - 8$

$\therefore 3س - 4ص + 8 = 0$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|3\times4-4\times5-8+|}{\sqrt{16+9}}$

$= \frac{40}{5} = 8$ وحدة طول

(8) نوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ بدلالة المقطعين (٠، -٣) ، (٤، ٠)

$\frac{س}{4} + \frac{ص}{3-} = 1$ بالضرب × ١٢

$\therefore 3س - 4ص - 12 = 0$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|12-2\times4-5\times3|}{\sqrt{16+9}}$

$= \frac{5}{5} = 1$ وحدة طول

(9) معادلة المستقيم : $\frac{ص-3}{س+3} = \frac{3}{4-}$

$\therefore 4ص - 12 = -3س - 9$

$\therefore 4ص + 3س - 3 = 0$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|3-0\times3+0\times4|}{\sqrt{9+16}}$

$= \frac{3}{5}$ وحدة طول

(10) معادلة المستقيم : $\frac{ص-1}{س-3} = \frac{5}{12}$

$\therefore 12ص - 12 = 5س - 15$

$\therefore 5س - 12ص - 3 = 0$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|3-2-\times12-4\times5|}{\sqrt{144+25}}$

$= \frac{41}{13}$ وحدة طول

(11) نوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ بدلالة المقطعين

$\therefore \frac{ص-3}{س-2} = \frac{3-6}{2-2-} = \frac{3-}{4}$

$\therefore 4ص - 12 = -3س + 6$

$\therefore 4ص + 3س - 18 = 0$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|18-6\times4+4\times3|}{\sqrt{16+9}}$

$= \frac{18}{5} = 3,6$ وحدة طول

(12) $م_1 = \frac{5-}{12}$ ، $م_2 = \frac{10-}{24} = \frac{5}{12}-$

$\because م_1 = م_2$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان

بفرض أن نقطة على المستقيم الأول

∴ النقطة $(0، \frac{3}{4})$

∴ طول العمود $= \frac{|9 + \frac{3}{4} \times 24 + 0 \times 10|}{\sqrt{576 + 100}}$

$= \frac{27}{26}$ وحدة طول

(١٣) $م_1 = \frac{3}{4}$ ، $م_2 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

∴ $م_1 = م_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

مهما أى نقطة على المستقيم ولتكن على المستقيم الأول .

$س = 0$ ، $ص = \frac{5}{4}$

∴ النقطة $(0، \frac{5}{4})$

∴ طول العمود $= \frac{|10 + \frac{5}{4} \times 8 + 0 \times 6|}{\sqrt{64 + 36}}$

$= \frac{20}{10} = 2$ وحدة طول

(١٤) $ل = \frac{|4 + 5 + 1 \times 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}$ وحدة طول

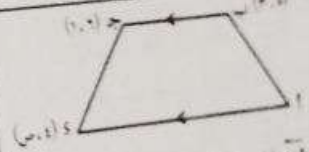
∴ $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = |ك + 6|$

∴ $10 = |ك + 6|$ ∴ $10 = \pm(ك + 6)$

∴ $10 = ك + 6$ ∴ $ك = 4$

وعندما $10 = -6 - ك$ ∴ $ك = -16$

(١٥)



∴ $\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أ د}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ $\frac{ص_2 - 1}{2 - 4} = \frac{3 - 1}{5 - 6}$

∴ $\frac{ص_2 - 1}{2} = \frac{2}{-1}$

∴ $ص_2 - 1 = -4$ ∴ $ص_2 = -3$

∴ طول $\overline{أ د} = \sqrt{(-4)^2 + (-3 - 1)^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$ وحدة طول

∴ طول $\overline{ب جـ} = \sqrt{(6 - 5)^2 + (3 - 1)^2}$

$= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ وحدة طول

إيجاد معادلة $\overleftrightarrow{ب جـ}$ وإيجاد طول العمود من أ إلى المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ إيجاد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ $\frac{ص - 1}{س - 6} = \frac{3 - 1}{5 - 6} = \frac{2}{-1}$

∴ $-ص + 1 = 2س - 12$

∴ $2س + ص - 13 = 0$

∴ طول العمود من أ إلى $\overleftrightarrow{ب جـ}$

$= \frac{|21 \times 2 + 1 - 13|}{\sqrt{1 + 4}}$

∴ طول العمود $= \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times 8}{5}$ وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيين) × الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{5} 2 + \sqrt{5}) \times \frac{\sqrt{5} 8}{5}$

= ١٢ وحدة مربعة

إرشادات تمارين (٧) على المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

(١) ∵ $(س - 4ص + 5) +$

$ك(س + 7ص - 17) = 0$

عوض عن النقطة س = ٤ ، ص = ٢

∴ $(4 - 8 + 5) + ك(4 + 14 - 17) = 0$

∴ $1 + ك = 0$ ∴ $ك = -1$

∴ $(س - 4ص + 5) - (س + 7ص - 17) = 0$

∴ $-11ص + 22 = 0$ ∴ $ص = 2$

(٢) $3س - 2ص + 25 +$

$ك(2ص + 5س - 23) = 0$

عوض عن س = ٢ ، ص = ٢

$(6 - 2 + 25) + ك(2 + 10 - 23) = 0$

$29 - 11ك = 0$ ∴ $11ك = 29$

∴ $ك = \frac{29}{11}$

$3س - 2ص + 25 +$

$\frac{29}{11}(2ص + 5س - 23) = 0$

∴ $33س - 22ص + 275 +$

$29(2ص + 5س - 23) = 0$

∴ $33س - 22ص + 275 + 58ص$

$+ 145س - 667 = 0$

∴ $178س + 36ص - 392 = 0$

∴ $89س + 18ص - 196 = 0$

(٣) ∵ (س، ص) = (-٢، ٠) + ك(٣، ٢)

∴ $س = -2 + 3ك$ ، $ص = 2ك$

∴ $\frac{س + 2}{3} = \frac{ص}{2}$

∴ $2س + 4 = 3ص$

∴ $2س - 3ص + 4 = 0$

∴ المعادلة العامة للمستقيمين معًا

∴ $3س + 2ص - 7 +$

$ك(2س - 3ص + 4) = 0$

عوض عن س = ٣ ، ص = ٤

∴ $3 \times 3 + 2 \times 4 - 7 +$

$ك(2 \times 3 - 3 \times 4 + 4) = 0$

∴ $10 - 2ك = 0$ ∴ $ك = 5$

∴ $3س + 2ص - 7 +$

$5(2س - 3ص + 4) = 0$

∴ $13س - 13ص + 13 = 0$

∴ $س - ص + 1 = 0$

∴ $\frac{ص}{2} = \frac{س}{-2}$ ∴ $ك =$

∴ $-2س = 2ص$ ∴ $2س + 2ص = 0$

∴ $س + ص = 0$

إيجاد نقطة التقاطع

∴ $س = -ص$ عوض فى المعادلة الثانية

∴ $-3ص - 2ص = 13$ ∴ $-5ص = 13$

∴ $ص = \frac{-13}{5}$ ، $س = \frac{13}{5}$

∴ النقطة $(\frac{13}{5}، \frac{-13}{5})$

المستقيم يمر بالنقطة السابقة ويوازى محور الصادات ∴ المعادلة $س = \frac{13}{5}$

(٥) $2ص - س - 2 +$

$ك(4ص + 3س - 24) = 0$ .... (١)

∴ $(3ك - 1)س + (2 + 4ك)ص$

$- (2 + 24ك) = 0$

∴ ميل المستقيم المطلوب $= \frac{-(3ك - 1)}{2 + 4ك}$

∴ ميل المستقيم الثانى $= \frac{-3}{4}$

شرط المسألة : ميل المستقيم المطلوب عمودى على المستقيم الثانى

∴ حاصل ضرب ميلهما $= -1$

∴ $\frac{-(3ك - 1)}{2 + 4ك} \times \frac{-3}{4} = -1$

∴ $\frac{3 - 9ك}{8 + 16ك} = -1$

∴ $8 + 16ك = -9ك + 3$

∴ $25ك = -5$

∴ $ك = -\frac{1}{5}$ بالتعويض فى (١)

∴ $2ص - س - 2 - \frac{1}{5}(4ص + 3س - 24) = 0$

∴ معادلة المستقيم بمعلومية نقطة وميل هى : $\frac{ص + ٣}{س + ٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ص + ١٢ = ٣س + ١٢

∴ ٤ص − ٣س = ٠

(٨) نقطة التقاطع (١ ، ٣) والميل $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم : $\frac{ص - ٣}{س - ١} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ص − ٩ = ٢س − ٢

∴ ٣ص − ٢س − ٧ = ٠

الطريقة الثانية : معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك)

ص − س − ٢ + ك(٢ص − ٣س − ٣) = ٠

∴ (١ + ٢ك)ص − (١ + ٣ك)س − ٢ − ٣ك = ٠ ..... (١)

، ميل المستقيم هو $\frac{(١ + ٣ك)}{١ + ٢ك}$

وهو يساوى الميل المعطى $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{(١ + ٣ك)}{١ + ٢ك} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ + ٩ك = ٢ + ٤ك

∴ ٥ك = −١ ∴ $ك = \frac{-١}{٥}$

∴ عوض عن ك فى (١)

∴ ص − س − ٢ − $\frac{١}{٥}$(٢ص − ٣س − ٣) = ٠

∴ ٥ص − ٥س − ١٠ − ٢ص + ٣س + ٣ = ٠

∴ ٣س − ٢س − ٧ = ٠ المعادلة المطلوبة

(٩) إذا قمنا بحل المعادلتين :

نجد أن نقطة التقاطع $(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥})$

والمستقيم موازى لمحور السينات

∴ $ص = \frac{٣}{٥}$

∴ ٢ص − ص − س + ٢٤ = ٠

∴ ٦ص − ٨س + ١٤ = ٠ (÷ ٢)

∴ ٣ص − ٤س + ٧ = ٠

(٦) معادلة المستقيم المطلوب بدلالة (ك) هى :

٣ص − ٢س + ١٥ + ك(٢ص + ٣س − ١٦) = ٠

∴ (٣ + ٢ك)ص + (٣ك − ٢)س + ١٥ − ١٦ك = ٠

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-(٣ك - ٢)}{٣ + ٢ك}$

، ميل المستقيم المعلوم = ٣

شرط المسألة : المستقيم المطلوب والمعلوم متوازيان ∴ ميلهما متساويان

∴ $\frac{-(٣ك - ٢)}{٣ + ٢ك} = \frac{٣}{١}$

∴ ٩ + ٦ك = −٣ك + ٢

∴ ٩ك = −٧ ∴ $ك = \frac{-٧}{٩}$

∴ ٣ص − ٢س + ١٥ − $\frac{٧}{٩}$(٢ص + ٣س − ١٦) = ٠

∴ ٣٧ص − ١٨س + ١٣٥ − ١٤ص − ٢١س + ١١٢ = ٠

∴ ١٣ص − ٣٩س − ٢٤٧ = ٠ (÷ ١٣)

∴ ص − ٣س + ١٩ = ٠

الطريقة الثانية : نجد أن نقطة التقاطع (٦ ، −١) والميل = ٣

(٧) نحل المعادلتين معًا :

٢ص − س + ٢ = ٠

٢ص + س + ١٠ = ٠

بالطرح

٤ص = −١٢ ∴ ص = −٣

∴ س = −٤

∴ نقطة التقاطع (−٤ ، −٣)

، ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-٤}{٣}$

∴ ميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{٣}{٤}$

الطريقة الثانية :

(٢ص − س − ١) + ك(ص − ٢س + ١) = ٠

(٢ + ك)ص − (١ + ٢ك)س − ١ + ك = ٠

المستقيم موازى لمحور السينات

∴ الميل = صفر ∴ $\frac{١ + ٢ك}{٣ + ك} = ٠$

∴ ١ + ٢ك = ٠ ∴ $ك = -\frac{١}{٢}$

∴ ٢ص − س − ١ − $\frac{١}{٢}$(ص − ٢س + ١) = ٠

∴ ٦ص − ٢س − ٢ − ص + ٢س − ١ = ٠

∴ ٥ص − ٣ = ٠ ∴ $ص = \frac{٣}{٥}$

(٥) نقطة التقاطع $(-\frac{٨}{٧} ، \frac{٢٥}{٧})$

شرط المسألة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{١} = ١$ .... (١)

عوض عن $س = -\frac{٨}{٧}$ ، $ص = \frac{٢٥}{٧}$

∴ $أ = \frac{١٧}{٧}$ بالتعويض فى (١)

∴ $\frac{٧س}{١٧} + \frac{٧ص}{١٧} = ١$

∴ المعادلة : ٧س + ٧ص − ١٧ = ٠

الطريقة الثانية :

٢س − ٣ص + ١٣ + ك(٢ص + س − ٦) = ٠

(٢ + ك)س + (٢ك − ٣)ص + (١٣ − ٦ك) = ٠

∴ (٢ + ك)س + (٢ك − ٣) = (٦ك − ١٣)

بالقسمة على (٦ك − ١٣)

∴ $\frac{س}{\frac{٦ك - ١٣}{٢ + ك}} + \frac{ص}{\frac{٦ك - ١٣}{٣ + ك٢}} = ١$

شرط المسألة :

الجزءان المقطوعان متساويان

∴ $\frac{٦ك - ١٣}{٢ + ك} = \frac{٦ك - ١٣}{٣ + ك٢}$

∴ ٢ + ك = ٢ك − ٣ ∴ ك = ٥

∴ المعادلة :

٢س − ٣ص + ١٣ + ٥(٢ص + س − ٦) = ٠

٢س − ٣ص + ١٣ + ١٠ص + ٥س − ٣٠ = ٠

∴ ٧س + ٧ص − ١٧ = ٠

(١١) يصنع مع محور الصادات الموجب زاوية قياسها ١٣٥°

∴ يعمل مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥°

∴ الميل = طا ٤٥° = ١

∵ نقطة التقاطع (٤ ، −٢)

∴ المعادلة : $\frac{ص + ٢}{س - ٤} = ١$

∴ المعادلة : ص + ٢ = س − ٤

∴ ص − س + ٦ = ٠

الطريقة الثانية :

(٢س + ٣ص − ٢) + ك(٣س − ص − ١٤) = ٠

..... (١)

∴ (٢ + ٣ك)س + (−٣ − ك)ص − ٢ − ١٤ك = ٠

الميل : $\frac{-(٢ + ٣ك)}{-٣ - ك} = ١$

∴ −٣ − ك = ٢ + ٣ك ∴ ٢ك = −٥

∴ $ك = -\frac{٥}{٢}$ بالتعويض فى (١)

∴ ٢س + ٣ص − ٢ − $\frac{٥}{٢}$(٣س − ص − ١٤) = ٠

∴ ٤س + ٦ص − ٤ − ١٥س + ٥ص + ٧٠ = ٠

∴ −١١س + ١١ص + ٦٦ = ٠

(بالقسمة على ١١)

∴ ص − س + ٦ = ٠

المرشد

فى الرياضيات

نماذج امتحانات
الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

امتحانات الصف الأول الثانوى الأزهرى
(الفصل الدراسى الثانى) فى الجبر وحساب المثلثات

(١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ **(أ) أكمل ما يأتى :**

(١) مجموعة حل المعادلة : حاθ + $\sqrt{٣}$ حتا θ = صفر
حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° هى .....

(٢) إذا كانت $\begin{pmatrix} ١+ت & ١-ت \\ حا هـ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$
حيث ت^{٢} = −١ ، هـ زاوية حادة وكان أ ب جـ ء = ١ و(هـ) = ...°

(٣) إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤ & ٣- \end{pmatrix}$ فإن س$^{-١}$ = ...

(٤) قطاع دائرى طول قطر دائرته ١٢ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° تكون مساحته = ... سم^{٢}

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} أ + \frac{١}{أ} & ١ \\ \frac{١}{أ} + أ & ١ \end{vmatrix}$ = ١٥ فإن أ^{٢} + $\frac{١}{أ^{٢}}$ = ...

(ب) حل نظام المتباينات الخطية التالية بيانيًا :
٢ص ≤ ٣س ، −٣س + ٢ص ≤ −٦

(جـ) رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ٦٣° . أوجد المسافة بين النقطة والراصد لأقرب متر .

---

٢ **(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين :
٢س + ص > ٤ ، س + ٢ص < ٦ هى .....
(أ ، (٣ ، −١)) ، (ب ، (١ ، ٢)) ، (جـ ، (٢ ، ...

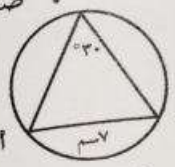
(٢) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix} =$ .....

$\left(\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}, \square\right)$

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + أ$^{-١}$ = I ، فإن :
مجموع عناصر المصفوفة أ = ... (٤ ، ٢ ، ١ ، صفر)

(٤) إذا كان ٣ حا θ + ٤ حتا θ = ٥ ، فإن ٣ حتا θ − ٤ حا θ = ...
(٥ ، ٤ ، ٢ ، صفر)

(٥) فى الشكل المقابل :
مساحة القطعة الدائرية الصغرى
التى وترها $\overline{أب}$ = ... سم^{٢}



(٢,٢ ، ٤,٤ ، ٨,٨ ، ٤٤)

(ب) إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س & ٣ \\ ص & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة س ، ص

(جـ) أثبت أن : $\frac{\text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta}{\text{ط}\theta} + \frac{\text{ط}\theta}{\text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta} = ١$

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ اكمل ما يأتى :

(١) أوجد مساحة المثلث فيه إحداثيات رؤوسه هى :
(-١ ، -٣) ، (٢ ، ٤) ، (-٣ ، ٥) مستخدمًا المحددات .

(٢) قطاع دائرى طول نصف قطر قاعدته ٧ سم ، زاويته المركزية ٢,١^{ج} أوجد مساحته .

(٣) إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (-١ ، -٣) أوجد باستخدام المصفوفات قيمتى أ ، ب .

(٤) من قمة برج ارتفاعه ٦٠م وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هى ٣٦′ ٢٨° ، أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر .

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ فأوجد قيمة س .

٢ اجب على الأسئلة الآتية :

(١) قطعة دائرية طول نصف قطرها ١٠ سم وطول قوسها ٥ سم . أوجد مساحتها .

(٢) بطريقة (كرامر) أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية الآتية :
٢س − ٣ص = ٣ ، س + ٢ص = ٥

(٣) مثل أنظمة المتباينات الآتية : حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣س + ص ≤ ١٥
٤س + ٣ص ≤ ٢٤ ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف
ر = ٣ص + ٢س أقل ما يمكن .

(٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ١- & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س حيث : ٢س − أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ ٢- & ١ & ٣- \end{pmatrix}$

(٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ حا^{٢} θ − ٣ حا θ حتا θ = صفر
حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[

(٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ س & ٢- \end{pmatrix} = I$ فإن س = ...
(٥ أ ، ٤ أ ، ٣ أ ، ٢)

(٢) المقدار حا^{٢} θ + ط^{٢} θ حا^{٢} θ فى أبسط صورة يساوى .....
(حا^{٢} θ أ ، ط^{٢} θ أ ، -١ أ ، ١)

(٣) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينات : س ≤ ٣ ، ص < ٣
س + ص > ٤ هى .....
((٤ ، ٣) أ ، (٣ ، ١) أ ، (٣ ، ٢) أ ، (٣ ، ٣))

(٤) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطوله قوسه ١٠ سم فإن مساحته سم٢
(٢٠ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٦٥)

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، (أ + ب)$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) المصفوفة ب . (٢) أ ب

(جـ) مثل بيانياً مجموعة المتباينات الآتية :

س ≥ ٣ ، ص ≥ س + ٢ ، س + ٢ص ≤ -٢

٢ **(أ) أكمل ما يأتى :**

(١) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين وكانت أ ب $^{-١}$ معرفة ، فإن (أ ب $^{-١}$)$^{-١}$ = ...

(٢) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ وقياس زاويتها المركزية θ° = ...

(٣) مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه (-١ ، -٣) ، (٢ ، ٤) ، (-٣ ، ٥) تساوى ..... وحدة مربعة .

(٤) إذا كان حتا (٩٠° - θ) = ١ ، فإن الحل العام للمعادلة هى .....

(ب) حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ٥ص = ٨

(جـ) من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية انخفاض سيارة على الأرض فوجد أن قياسها ١٥ ٢٧° حيث السيارة وقاعدة البرج فى مستوى أفقى واحد .
أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج لأقرب متر .

(٤) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ **(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ١٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ليها معكوس ضربى عندما أ .....

(٦ ، ±٦ ، ∈ ح - {٦} ، ∈ ح - {-٦ ، ٦})

(٢) إذا كان ظا^{٢} θ = ٥ فإن ٣ + طا^{٢} θ = ...

(٧ ، ٣ ، ٥ ، ١٠)

(٣) إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢س & ٥ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١١ ، فإن س = ...

(٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥)

(٤) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطوله قوسه ٢ سم ،
فإن مساحته = ... سم٢ (٣ ، ٤ ، ٨ ، ٦)

(ب) باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه :
(٢ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (-٣ ، -٢)

(جـ) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° .

٢ **(أ) أكمل ما يأتى :**

(١) أبسط صورة للمقدار : (حا^{٢} θ + حتا^{٢} θ)^{٢} + طتا^{٢} θ هى .....

(٢) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢س - ١ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ متماثلة فإن س = ...

(٣) إذا كانت : ١٨٠° < θ < ٣٦٠° ، وكانت : ٢ حتا θ + ١ = ٠ ،
فإن : θ = ...

(٤) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ ، ب$^{-١}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن المصفوفة أ ب على النظم .....

(ب) أوجد القيمة الصفرى لدالة الهدف ر = ٣س + ٢ص تحت القيود :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٣س + ص ≤ ٦

(جـ) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° وكان بعد الراصد عن قاعدة البرج يساوى ٦٠ م أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

(٤) في الشكل المقابل :

فإن س = ... سم

ص = ... سم

(ب) أوجد مستخدمًا المحددات مساحة Δ أ ب جـ حيث :

أ (-٢ ، -٢) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (-٤ ، ٣)

(جـ) أ ب وتر دائرة طوله ٨ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° لأقرب رقم عشري واحد ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التي وترها $\overline{أ ب}$.

(٦) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الأقصر الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix}$ = ٣ ، فإن $\begin{vmatrix} ٢س & ٥ص \\ ٢ع & ٥ل \end{vmatrix}$ = ...

(٦ أ، ٢٥ أ، ٣٠ أ، ١٥)

(٢) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة المتباينات س ≥ ٢ ، ص ≥ ١ معًا هي .....

[(١ ، ٢) أ، (٢ ، ١) أ، (٣ ، ١) أ، (٣ ، ٢)]

(٣) إذا كان قا² أ = ١٥ ، فإن طا² أ = ...

(١٦ أ، ٢٢٤ أ، ١٤ أ، ٢٢٦)

(٤) القطاع الدائري الذي طوله قوسه ١٦ سم ، وطول قطر دائرته ١٨ سم مساحته ..... سم² .

(٢٧ أ، ٧٢ أ، ١٨ أ، ١٤٤)

(ب) إذا كان ب" + جـ" = $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix}$ ، ا = $\begin{pmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق أن : س = (ا ب + ا جـ)"

(جـ) أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التي طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ١٢ سم

(أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(ب) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف : ر = ٢س + ص تحت القيود .

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٨ ، -٤س + ص ≤ -٨

(جـ) حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات :

٣س = ١ - ٤س ، ٥س + ١٢ = ٧ص

(أ) أكمل ما يأتي :

(١) مساحة القطاع الدائري الذي محيطه ١٢ سم ، طول قوسه ٦ سم تساوى .....

(٢) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١- & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ٤- \\ ٠ & ٠ & ٢- \end{vmatrix}$ = ...

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ١ - ١٢أ & ١ + ٣ب \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$

فإن أ = ... ، ب = ...

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) $\begin{vmatrix} \text{قا}\theta & \text{طا}^2\theta \\ 1 & \text{قا}\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3- \\ 5 & 7- \end{vmatrix} =$ .....

(٢) التمانى المنتظم الذى طول ضلعه ٧ سم مساحته = ... سم^2
لأقرب رقمين عشريين .

(٣) إذا كان $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ فإن س = ... ، ص = ...

(٤) عمود إنارة طوله ٧,٢ متراً يلقى ظلاً على الأرض طوله ٤,٨ متراً ،
فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ = ...

(ب) إذا كان : حا θ + حتا $\theta = \frac{3}{2}$ ، حيث : $\theta \in]0 ، \frac{\pi 3}{2}[$
فأوجد قيمة : حا θ حتا θ

(جـ) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات الآتية :
س ≥ صفر ، ص ≥ صفر ، س + ص ≥ ٦ ، ٢س + ص ≥ ١٠
ثم أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٤س + ص

سلسلة المرشد لجميع صفوف الشهادة الثانوية الأزهرية

المواد العربية	المواد الثقافية	المواد الثقافية	المواد الشرعية
	القسم العلمى	القسم الأدبى	
نحو	رياضيات	جغرافيا تاريخ	توحيد
صرف	فيزياء كيمياء	منطق	حديث
بلاغة	أحياء	فرنساوى	تفسير
أدب ونصوص	إنجليزى مستوى	إنجليزى مستوى	فقه
محفوظات	رفيع	رفيع علم نفس	ميراث
تعبير		فلسفة	منطق

أجب عن السؤال الآتى :

أجب عن الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) النقطة التى عندها للدالة م = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة عظمى هي .....
[(٠ ، ٠) أ، (٠ ، ١٠) أ، (٠ ، ٤٠) أ، (٢٠ ، ١٠)]

(ب) قيمة أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & 4 \\ 9 & أ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا هى ح = {.....}
(±٦ أ، ±٣ أ، ±$\sqrt{13}$ أ، ±$\sqrt{5}$)

(جـ) المقدار حا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) فى أبسط صورة يساوى .....
(١ أ، حا$^2\theta$ أ، حتا$^2\theta$ أ، حاθ حتاθ)

(د) محيط القطاع الدائري الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم
= ..... سم (١٤ أ، ٢٠ أ، ٣٠ أ، ٢٤)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كان $\begin{pmatrix} س+8 & 5- \\ 3 & ص- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 5- \\ 3 & 4ص-10 \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة س ، ص ثم أوجد (س ص) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ب) أثبت صحة المتطابقة : طاθ + طتاθ = قاθ قتاθ

❸ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر :
س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ص = ٥

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٥ سم وقياس زاويتها ١٥٠° لأقرب سم^2 .

❹ (أ) حل النظام الآتى بيانيًا : ٣س + ٥ص ≤ ١٥ ، ص < س − ١

(ب) يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعدة برج ، رصد زاوية ارتفاع قمة البرج ، فوجد أن قياسها ٢٥° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

(٨) امتحان (الادارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• اجب عن السؤال الآتى (إجبارى):

❶ اكمل ما يأتى :

(أ) المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان ..... ويكون لها معكوس ضربى إذا كان .....

(ب) مضلع ثمانى منتظم طول ضلعه ٦ سم فإن مساحته = ... سم٢

(جـ) قطاع دائرى محيطه ١٢ سم ، طول قوسه ٣ سم فإن مساحته = ... سم٢

(د) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن س = ...

اجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كان : $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ٥أ + ١٢I = \square$

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحتها ٥٦ سم٢ أوجد طول نصف قطرها.

❸ (أ) عين مجموعة حل المتباينات بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≥ ٧ ، ٣س + ٤ص ≥ ١٤

ثم أوجد قيمة : س ، ص التى تجعل ر = ٣٠س + ٥٠ ص أكبر ما يمكن .

(ب) أثبت أن : $\frac{ظا^{٢}\theta + ١}{قا^{٤}\theta} = ١ - حا^{٢}\theta$

❹ (أ) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ حيث :

أ (٣ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٢) ، جـ (١ ، -٤)

باستخدام المحددات.

(ب) حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات :

٢ص = ٥ - ٣س ، ٢س = ٣ - ص

(٩) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• اجب عن السؤال الآتى (إجبارى):

❶ اكمل ما يأتى :

(أ) $(حا\theta + حتا\theta)^{٢} - \frac{٢}{ظا\theta\ قا\theta}$ = ...

(ب) إذا كان أ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن $ب^{-١}أ^{-١}$ = ...

(جـ) مساحة Δ س ص ع حيث س (٣ ، ٣) ، ص (-٤ ، ٢) ، ع (١ ، -٤) تساوى ..... وحدة مربعة

(د) إذا كانت س مصفوفة بحيث س × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

فإن مصفوفة س = ...

اجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) حل نظام المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

س + ص = ٥ - ٣ع ، ص = ع ، ٢س - ٤ع = -٢

(ب) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متر ، إذا كانت الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوى ٦٣° ، أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض.

❸ (أ) أوجد القيمة الصغرى لدالة الهدف : ر = ٤س + ص تحت القيود :

س + ص ≥ ٦ ، ٢س + ص ≥ ١٠ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة حتا$(\theta - \frac{\pi}{٢}) = \frac{١}{٢}$

❹ (أ)

إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} صفر & -٢س & -٥ \\ ع+٦ & صفر & ٣ع \\ ٣ص+س & ٦ & صفر \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

أوجد س ، ص ، ع

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم٢ ، أوجد طول نصف قطرها ومساحة القطع لهذه القطعة ؟

(١٠) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• أجب عن السؤال الآتى (إجبارى):

١ أكمل ما يأتى:

(أ) إذا كان $\begin{pmatrix} \text{س} \\ -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، فإن س + ص = ...

(ب) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & أ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٤$ فإن أ = ...

(جـ) إذا كان ٢ جاθ = ١ ، فإن ق(اθ) = ... حيث $\theta \in]٠, \frac{\pi}{٢}[$

(د) إذا كان ظاθ = ٥ فإن ظا$^{٢}\theta$ = ...

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى:

٢ (أ) أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه (-٤، ٢) ، (٣، ١) ، (-٢، ٥) باستخدام المحددات

(ب) أثبت صحة المتطابقة: جاθ جا(٩٠ - θ) ظاθ = ١ - جتا$^{٢}\theta$

٣ (أ) أوجد القيمة العظمى للدالة الهدف حيث: ر = ٢س + ص تحت القيود
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٨ ، -٤س + ص ≤ -٨

(ب) قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته.

٤ (أ) إذا كانت ص = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ \text{صفر} & ٣ \end{pmatrix}$ ، أثبت أن: ص^{٢} - ٢ص - I٣ = ☐

(ب) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٦٠ متر فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٠°
أوجد بعد القارب عن قمة الفنار.

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أكمل ما يأتى:

(أ) إذا كانت المصفوفة س على النظم ٣ × ٢ والمصفوفة ص على النظم ٢ × ١
فإن س ص على النظم .....

(ب) إذا كان س = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن س$^{-١}$ = ...

(جـ) إذا كان $\begin{pmatrix} ٤ & أ^{٢} \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ = ١٠ فإن أ = ...

(د) إذا كان ظاθ = ٣ فإن قتا$^{٢}\theta$ = ...

٢ (أ) أثبت صحة المتطابقة: جاθ جا(٩٠ - θ) ظاθ = ١ - جتا$^{٢}\theta$

(ب) قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ومحيطه ٢٥ سم أحسب مساحته.

٣ (أ) من قمة برج ارتفاعه ٦٠ م رصد شخص زاوية إنخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج تساوى ٣٦′ ٢٨° ، أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

(ب) عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ص + س ≤ ١٥ ، ٤س + ٣ص ≤ ٢٤

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم س ، ص التى تجعل دالة الهدف:
ر = ٣ص + ٢س أقل ما يمكن.

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

• **أجب عن السؤال الآتى (إجبارى):**

١ **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:**

(أ) المقدار: جاθ جتاθ ظاθ فى أبسط صورة .....
(جا$^{٢}\theta$ أ، جتا$^{٢}\theta$ أ، ظا$^{٢}\theta$ أ، ١ - جا$^{٢}\theta$)

(ب) إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب$^{-1}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم .....
(٣ × ٣ أ، ٣ × ١ أ، ٢ × ١ أ، ١ × ٢)

(جـ) إذا كان ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠° وكان $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = صفر ، فإن θ تساوى
(٣٠° أ، ٦٠° أ، ١٢٠° أ، ١٥٠°)

(د) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات الآتية :
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص < ٤ ، س + ٣ص < ٦ هى .....
[(١، −٣) أ، (٣، ٠) أ، (٢، ٣) أ، (١، ١)]

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كان أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، فأثبت أن : |أ^{٢} − ٥أ| + I٢٢ = □

(ب) أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٢س + ص تحت القيود
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≥ ١٨ ، −٤س + ص ≤ −٨

❸ (أ) أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه (−٤، ٢) ، (٣، ١) ، (−٢، ٥)
باستخدام المحددات.

(ب) وتر فى دائرة طوله ٨ سم وعلى بعد ٣ سم من مركزها. أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة.

❹ (أ) حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :
س + ٣ص − ٥ = صفر ، ٢س = ٨ − ٥ص

(ب) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠ م فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٥°.
أوجد بعد القارب عن قمة الفنار لأقرب متر.

أجب عن السؤال الآتى (إجبارى):

❶ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) إذا كان أ + أ$^{-1}$ = □ فإن أ هى .....
(مصفوفة صف أ، مصفوفة عمود أ، مصفوفة متماثلة أ، مصفوفة شبه متماثلة)

(ب) طا θ قتا θ = ... (١ أ، حتا θ أ، قا θ أ، حا θ)

(جـ) النقطة التى تحقق منطقة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص > ٣ هى ..... [(٣، ١) أ، (١، ٢) أ، (٣، ٢) أ، (١، ٣)]

(د) قطاع دائرى طول قطر دائرته ٨ سم وطول قوسه ٦ سم فإن مساحته .....
(١٢ سم^{٢} أ، ٤٨ سم^{٢} أ، ٢٤ سم^{٢} أ، ٧ سم^{٢})

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

❷ (أ) إذا كانت أ = (٢ −١ ٣) ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب إن أمكن

(ب) من نقطة على سطح الأرض وعلى بعد ٥٠ م من قاعدة برج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٢٦′ ٣٨° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

❸ (أ) باستخدام المحددات أوجد مساحة Δ أ ب جـ حيث :
أ (١، ٢) ، ب (٣، −٤) ، جـ (−٢، ٣)

(ب) أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينات ٢س + ص ≥ ٤ فى ح × ح

❹ (أ) مثلث أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ٨ سم أوجد مساحته.

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ أثبت أن : |أ^{٢} − ٢أ| − I٣ = □

(١٤) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن السؤال الأول (اختياري) :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(أ) مجموعة حل المعادلتين : س − ٣ص = −٤ ، ٢س + ص = ٢ هى

[(−٢ ، ٢)] أ. {(−٢ ، ٢)} أ. {(٢ ، −٢)} أ. {(٢ ، ٢)}

(ب) قطع دائرى محيطه ١٠ سم وطوله قوسه ٢ سم فإن مساحته بالسنتيمترات المربعة تساوى ..... (٤ أ. ٨ أ. ١٠ أ. ٢٠)

(جـ) أبسط صورة للمقدار : (جا θ + جتا θ)^٢ − ٢ جا θ جتا θ تساوى .....

(صفر أ. ١ أ. ٢ أ. ٣)

(د) إذا كانت المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٢ فإن عدد عناصر أ يساوى .....

(٣ أ. ٦ أ. ٩ أ. ١٢)

• أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) أثبت صحة المتطابقة الآتية : $\frac{\text{جتا س ظا س}}{\text{ظا س}} = ١ - \text{جتا}^٢ \text{س}$

(ب) إذا كانت : هـ = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : هـ^٢ − ٣هـ − ٢ح = ☐

---

٣ (أ) إذا كانت : هـ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : هـ^ن = هـ

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٢ سم وطول قوسها ٢٠ سم.

---

٤ (أ) رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠ م ، فوجد أن زاوية انخفاضه ٣٥° ، أوجد بعد القارب عن قمة الفنار.

(ب) عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≥ ٨ ، ص ≤ ٣

ثم أوجد مجموعة قيمة س ، ص التى تجعل قيمة الدالة ر = ٣س + ٢ص

(١٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(أ) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ وكان نظم أ ب هو ٢ × ١ فإن ب مصفوفة على النظم .....

(٢ × ٢ أ. ٣ × ١ أ. ٢ × ١ أ. ٣ × ٣)

(ب) النقطة التى لا تنتمى إلى مجموعة حل المتباينة : س + ص ≥ ٤ هى .....

[(٢ ، ٠) أ. (٠ ، ٠) أ. (٣ ، ٠) أ. (١ ، ٣)]

(جـ) مجموعة حل المعادلة : جا θ + جتا θ = صفر حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° تساوى ..... (٢١٠° أ. ٢٢٥° أ. ٢٤٠° أ. ٣١٥°)

(د) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم تساوى .....

(٣√٦ سم^٢ أ. ٣√٩ سم^٢ أ. ٣√١٢ سم^٢ أ. ٣√١٨ سم^٢)

---

٢ (أ) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زويتها المركزية ٢,٠٢°

(ب) استخدم طريقة كرامر فى حل نظام المعادلتين الآتيتين :

س + ٢ص = ٠ ، ٢س − ٣ص = ١

---

٣ (أ) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متراً عن قاعدة عمود رأسى وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود ١٥ ′ ٣٢° ، أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض .

(ب) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تجعلان لدالة الهدف ر = ٦س + ٤ص قيمة عظمى تحت القيود :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص ≥ ٨ ، س + ص ≥ ٦

المرشد

فى الرياضيات

نماذج امتحانات الهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

(الفصل الدراسى الثانى) فى الهندسة التحليلية

(١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الازهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اكمل ما يأتى :

(١) المتجه : $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} + \overline{٣\sqrt{٢}}\overleftarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو .....

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١) إلى المستقيم :
٤س – ٣ص + جـ = صفر يساوى ٣ وحدة طول فإن جـ = ... أو .....

(٣) إذا كان أ = (–٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، –٣) ، جـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث
أ جـ : جـ ب = ٣ : ١ ، فإن جـ = (..... ، .....)

(٤) مساحة سطح المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٣س – ٤ص = ١٢ تساوى ..... وحدة مساحة .

(٥) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع حيث : أ = (٢ ، –١) ، ب = (٧ ، ١) ، جـ = (٤ ، ٤) فإن إحداثى نقطة ء = ...

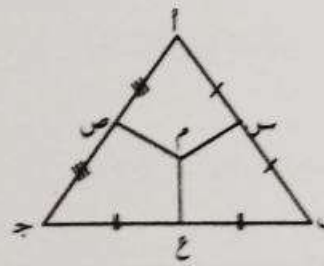
(ب) أثبت أن المستقيمين س – ٤ص + ١٤ = صفر ، ٤س + ص + ٥ = صفر متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٣ ، ٢)

(جـ) فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء أثبت أن : $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ءجـ} = \overleftarrow{أجـ} + \overleftarrow{ءب}$

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١} = (٦ ، \frac{\pi ٢}{٣})$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = (٦ ، \frac{\pi ٤}{٣})$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٩\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص}$
فإن مقدار محصلة هذه القوى = ...
(١٣ أ، ١٠ أ، ٥ أ، $\overline{٣\sqrt{٦}}$ أ)

(٢) فى الشكل المقابل :
إذا كانت م نقطة متوسطات Δ أ ب جـ
فإن : $\overleftarrow{مس} + \overleftarrow{مص} + \overleftarrow{مع} =$ .....
($٣\overleftarrow{عب}$ أ، $٢\overleftarrow{صجـ}$ أ، ٠ أ، $٥\overleftarrow{أس}$)



(٣) إذا كانت أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، ١٠) فإن محور الصادات يقسم $\overline{أب}$ بنسبة .....
(٢ : ١ من الداخل أ، ٥ : ٢ من الخارج
أ، ٢ : ١ من الخارج أ، ٥ : ٢ من لداخل)

(٤) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين ص = (٢ − $\overline{٣}$ ٧)(س − ٧) ، ص = (٢ + $\overline{٣}$ ٧)(س + ٥) هو .....°
(١٥٠ أ، ١٣٥ أ، ١٢٠ أ، ١١٠)

(٥) إذا كان ل١ ≡ أس − ٣ص + ٧ = صفر ، ل٢ ≡ $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٣} = ٣$
فإن أ = ... حيث ل١ // ل٢

(ب) أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٢ ، −٣)

(جـ) دائرة مركزها نقطة الأصل . أثبت أن الوترين المرسومين فى الدائرة واللذان معادلتاهما : ٣س + ٤ص + ١٠ = صفر ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = صفر متساويان فى الطول .

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(أ) **أولا :** أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه لمحور السينات .

ثانيا : أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم ٥س − ١٢ص − ٧ = صفر

(ب) **أولا :** إذا كانت جـ(٢ ، ٦) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث ب(٣ ، ٧) فأوجد إحداثى أ

ثانيا : إذا كانت : $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، ك) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٤ ، ٢) وكان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ فأوجد قيمة ك .

(جـ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٢س − ٣ص = −٤
$\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك(٣ ، ٤)

(د) أثبت أن المستقيمين :
$\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ، ٢س + ص + ٢ = صفر متوازيان .

(هـ) إذا كان أ = (٢ ، −٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

١ (أ) أولا : إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ = (٧ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ك) ، ‖$\overleftarrow{أب}$‖ = ٥
فأوجد قيمة ك .

ثانيا : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازى محور الصادات .

(ب) **أولا :** إذا كان و$\overleftarrow{أ}$ = (٨ ، $\overline{٣}$ ٨) أوجد الصورة القطبية للمتجه و$\overleftarrow{أ}$

ثانيا : أوجد طولى الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :
٣س + ٤ص − ١٢ = صفر

(جـ) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص = ٥ ، ٢س + ص − ٨ = ٠ ويمر بالنقطة (٢ ، ١) .

(د) أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٦ سم مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

(هـ) أب جـ مثلث أخذت النقطة ء ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث ٢ب ء = ٣ ء جـ
أثبت أن : ٢$\overleftarrow{أب}$ + ٣$\overleftarrow{أجـ}$ = ٥$\overleftarrow{أء}$

(٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة المنوفية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{م}$ = (٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، ك) وكان $\overleftarrow{م} \perp \overleftarrow{هـ}$ فإن ك = ...
($\frac{٣}{٤}$ أ، $\frac{٤}{٣}$ أ، ٣ أ، −٣)

(٢) المتجه $\overleftarrow{أ}$ = ٢$\overleftarrow{س}$ − ٢$\overline{٣}$ $\overleftarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو .....
[($\pi\frac{٣}{٥}$ ، ٤) أ، ($\pi\frac{٥}{٣}$ ، ٤) أ، (٢٤٠° ، ٤) أ، (١٢٠° ، −٤)]

(٣) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ٣س − ص + ٦ = ٠ ، ٢س + ص = ٥ تساوى ..... (١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٤) فى Δ أ ب جـ يكون $\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{بجـ}$ + $\overleftarrow{أجـ}$ = ...
($\overleftarrow{٢جـأ}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$)

(ب) إذا كان : ٢ ق + ٥ س ص = ٢ ع ص - ٣ ص س ، أثبت أن : ل = ع س

(جـ) أب قطر فى دائرة مركزها م = (-٢ ، ١) فإذا كان ب = (-٦ ، ٣)

أوجد معادلة المستقيم المماس للدائرة عند نقطة أ

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان ‖٣ أ‖ = ‖-١٥ أ‖ ، فإن ك = ...

(٢) إذا كانت أ = (-٣ ، ٤) ، ب = (٦ ، -٨) فإن محور السينات يقسم أب بنسبة .....

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة (٩ ، ٥) على المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢ يساوى ..... وحدة طول .

(٤) ا ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن $\overrightarrow{أب} + 2\overrightarrow{بم}$ = ...

(ب) جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ وكانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (-٥ ، ٢)

وكان ب جـ = ٢ أب . أوجد إحداثى نقطة جـ

(جـ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٢) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٢س + ص = ٥ ، ٣س - ٢ص = ٤

(٤) امتحان (الادارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

❶ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -١) ، فإن $\overrightarrow{أب}$ = ...

((٣ ، ٤) أ، (٢ ، ٩) أ، (-٣ ، -٤) أ، (٩ ، ٤))

(٢) إذا كان $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ء}$ = (٢ ، ك) وكان $\overrightarrow{م} \perp \overrightarrow{ء}$ فإن : ك = ...

($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ٣ ، -٣)

(٣) المنحنى $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ ، ٢ $\overrightarrow{ص}$ على الصورة القطبية هو .....

(($\pi\frac{٣}{٥}$ ، ٤) أ، ($\pi\frac{٥}{٣}$ ، ٤) أ، (٦٠° ، ٤) أ، (١٢٠° ، -٤))

(٤) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم :

$\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، صفر) + ك(٤ ، ٣) يساوى ..... وحدة طول .

(٣ أ، ٤ أ، ٥ أ، ١٥)

(ب) أثبت أن : المستقيمين ل١ : ٢س + ص - ٤ = ٠

ل٢ : ٢س + ص + ٣ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

(جـ) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -١) ومتجه الاتجاه له (-٣ ، ٥)

❷ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$

فإن ٢ $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = ...

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين :

س = ٢ ، ص = ٥ هى .....

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، -٢) ،

فإن ‖٣ $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$‖ = ...

(٤) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه د منتصف $\overline{بجـ}$ ،

فإن $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{أجـ}$ = ...

(ب) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

ل١ : س + ٥ص = ٣ ، ل٢ : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك(٤ ، ١)

(جـ) إذا كانت النقطة أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٧ ، -١)

أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

❶ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ١) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (-٣ ، ك) متوازيين فإن ك = ...

($\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{٣}{٢}$ أ، ٦ أ، -٦)

(٢) إذا كان أ (-٣ ، ٤) ، ب (٦ ، -٨) فإن محور السينات يقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة .....

(٢ : ١ أ، ١ : ٢ أ، ٣ : ٤ أ، ٢ : ٣)

(٣) إذا كان ك‖٤ $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖-٣ $\overrightarrow{أ}$‖ ، فإن ك = ...

($\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{-٣}{٤}$ أ، $\frac{٣}{٤}$ أ، $\frac{-٤}{٣}$ أ)

(٤) إذا كان المستقيمان ل ، ل$_{م}$ هما على الترتيب ٢س - ٣ص + أ = ٠ ،
٣س + ب ص - ٦ = ٠ ، متعامدان فإن ب = ...
(-٢ أ ، ٢ أ ، $\frac{-٩}{٢}$ أ ، $\frac{٩}{٢}$)

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم الذى
معادلته ٥س - ١٢ص - ٧ = ٠

(جـ) إذا كان ل : ٣س + ٢ص - ٧ = ٠ ، ل$_{م}$: ٢س - ٣ص + ٤ = ٠ .
أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ل ، ل$_{م}$
والنقطة (٣ ، ٤)

٣ (أ) أكمل ما يأتى :

(١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع المحورين السينى والصادى
جزأى موجبين مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى .....

(٢) إذا كان المستقيم : أس - ٤ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات زاوية طلها ٠,٧٥ ، فإن قيمة أ = ...

(٣) إذا كان : وآ = (٨ ، ٣٨) ، فإن الصورة القطبية للمتجهة وآ = ...

(٤) إذا كان : آ = (٦ ، -٢) ، ب = (٤ ، ٣) ،
فإن : ٢ آ - ٣ ب = ...

(ب) فى Δ أ ب جـ ، ء ∈ ب جـ حيث ب ء : ء جـ = ٣ : ٢
أثبت أن : ٢ أب + ٣ أجـ = ٥ أء

(جـ) أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) ويوازى
المستقيم : س + ٢ص - ٧ = صفر

سلة المرشد

شرح مراجعة نهائية

أجب عن الأسئلة الآتية :

أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

١ (أ) البعد بين المستقيمين ص - ٣ = صفر ، ص + ٢ = صفر يساوى .....
(١ أ ، ٢ أ ، ٣ أ ، ٥)

(ب) إذا كان آ ب // ب جـ حيث آ = (-٤ ، -٣) ، ب جـ = (٨ ، ك) فإن
قيمة ك = ...
(٦ أ ، -٦ أ ، ٨ أ ، -٨)

(جـ) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) يوازى محور
السينات هى .....
(س = ٣ أ ، ص = ٥ أ ، ص = ٣ أ ، ص = ٥)

(ء) أ ب جـ مثلث فيه أ(صفر ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (-٣ ، ٥) فإن
إحداثى نقطة تلاقى المتوسطات هى .....
((صفر ، $\frac{٥}{٢}$) أ ، (٥ ، صفر) أ ، (صفر ، ٥) أ ، ($\frac{٥}{٢}$ ، صفر))

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) إذا كانت : أ(٣ ، ١) ، ب (-٢ ، ٥) ،
أوجد إحداثيات النقطة جـ التى تقسم أب من الداخل بنسبة ٢ : ٣

(ب) أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ ويمر بالنقطة (٢ ، -١)

٣ (أ) أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث أ (٢ ، -١) ، ب (٧ ، ١) ، جـ (٤ ، ٤)
أوجد إحداثى نقطة ء .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين.
٣س - ٤ص - ١١ = صفر ، س + ٧ص + ٥ = صفر

٤ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ(٢ ، -١) ويمر بنقطة تقاطع
المستقيمين ٧س + ص + ٣ = صفر ، ٥س - ص - ٣ = صفر.

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) إلى الخط المستقيم
المار بالنقطتين (صفر ، -٣) ، (٤ ، صفر).

(٧) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القليوبية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان المستقيمان : ٣س - ٢ص + ٧ = ٠ ، أس + ٣ص + ٥ = ٠

متعامدين فإن أ = ...

(ب) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) ومتجه الاتجاه له (٣ ، ٤) هى .....

(جـ) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (٦ ، -٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٣) فإن $\| ٢\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب} \|$ = ...

(د) إذا كان $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، -٢) + ك(٣ ، -١) ، $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك(١ ، ٢)

فإن قياس الزاوية الحادة بينهما = ... °

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على الذى معادلته :

٥س - ١٢ص - ٧ = صفر

(ب) إذا كانت أ = (٢ ، -١) ، ب = (-٣ ، ٤) أوجد إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

٣ (أ) أوجد المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(ب) إذا كان أ = (٣ ، ٤) ، ب = (٥ ، -١) ، جـ = (٢ ، -٢) هى رؤوس متوازى أضلاع أ ب جـ ء أوجد إحداثى الرأس ء.

٤ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (-٢ ، ٤) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

ل١ : $\overleftarrow{ر}$ = (-١ ، ٣) + ك(٢ ، -١) ،

ل٢ : ٢س - ٣ص + ٤ = صفر

(ب) أ ب جـ مثلث فيه أ (٠ ، ٥) ، ب (٢ ، -١) ، جـ (٦ ، ٣)

أثبت أن المثلث متساوى الساقين ، وأحسب ق(∠أ) بالدرجات.

(٨) امتحان

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان المستقيمان : ٣س - ٢ص + ٧ = صفر ،

أس + ٣ص + ٥ = صفر ، متعامدان فإن أ = ...

(ب) المستقيم $\frac{س}{٤} - \frac{ص}{٣}$ = ١ يقطع محور الإحداثيات فى أ ، ب فإن مساحة Δ و أ ب = ... وحدة مربعة

(جـ) المتجه $\overleftarrow{م}$ = (١٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة $\overleftarrow{م}$ = ...

(د) إذا كانت $\overleftarrow{ع}$ = ١٢ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب}$ = -٨ $\overleftarrow{ى}$ فإن $\overleftarrow{ع_{أب}}$ = ... $\overleftarrow{ى}$

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overleftarrow{ب جـ}$ = ٣ $\overleftarrow{أ ء}$

برهن أن أ ب جـ ء شبه منحرف ، $\overleftarrow{أ جـ}$ + $\overleftarrow{ب ء}$ = ٤ $\overleftarrow{أ ء}$

(ب) إذا كان أ (-١ ، ٤) ، ب (١ ، ٢) ، جـ (٥ ، -٢) أوجد النسبة التى تقسم بها النقطة ب القطعة $\overline{أ جـ}$ مبينًا نوع التقسيم.

٣ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨ ، -٢) على المستقيم :

$\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، $\frac{١}{٣}$) + ك (-٣ ، ٤)

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٧ ، ٤) وموازيًا للمستقيم الذى معادلته ٣س = ٢ص

٤ (أ) أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم س - ٢ص + ٣ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، -١) ، (٢ ، ١)

(ب) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (٤ ، -٦) ، $\overleftarrow{ب}$ = (-٦ ، ٩) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (-٣ ، -٢)

فأوجد $\| \frac{١}{٢} \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} - ٣\overleftarrow{جـ} \|$

(٩) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(أ) إذا كانت أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٣ ، -١) فإن $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(ب) قياس الزاوية بين المستقيمين س - ٧ = ٠ ، ص = ٣ يساوى .....

(جـ) المتجه $\overrightarrow{ق}$ = (٨ ، ٨) فى الصورة القطبية = ...

(د) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، -٤) ويوازى محور السينات هى .....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) أ ب جـ مثلث فيه د ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث ٢ب د = ٣ د جـ

أثبت أن : ٢$\overrightarrow{أب}$ + ٣$\overrightarrow{أجـ}$ = ٥$\overrightarrow{أد}$

(ب) أثبت أن المستقيمين ل : ٣س - ٤ص = ٦ ، ل : ٨ص - ٦س - ١٣ = ٠

متوازيان وأوجد البعد بينهما

٣ (أ) أوجد إحداثى النقطة التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٥ : ٣ حيث :

أ = (-١ ، ٤) ، ب = (-٢ ، ٣)

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س - ص + ٢ = ٠

٢س + ص = ٨ ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)

(١٠) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

عن الأسئلة الآتية :

كمل ما يأتى :

) إذا كان المستقيمان ٣س - ٢ص + ٧ = ٠ ، أس - ٣ص + ٥ = ٠

متعامدان فإن أ = ...

) قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن

$\overrightarrow{ق}$ = ... $\overrightarrow{س}$ + ... $\overrightarrow{ص}$

الرياضيات

(جـ) إذا كان $\|-٤\overrightarrow{أ}\|$ = ٢ $\|\overrightarrow{ك أ}\|$ فإن ك = ...

(د) إذا كانت أ (-٣ ، ٤) ، ب (٦ ، -٨) فإن محور السينات يقسم $\overline{أب}$

من ..... بنسبة ..... : .....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٤ (أ) أثبت أن المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، -٢) ، ٢س + ص + ٢ = ٠

متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد بينهما .

(ب) أ ب جـ د شكل رباعى فيه $\overrightarrow{بجـ}$ = ٣$\overrightarrow{أد}$ أثبت أن :

(١) أ ب جـ د شبه منحرف. (٢) $\overrightarrow{أجـ}$ + $\overrightarrow{بد}$ = ٤$\overrightarrow{أد}$

٥ (أ) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س - ك ص - ٨ = ٠

٢س - ص - ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد قيمة ك.

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، -٤)

ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦ (أ) دائرة مركزها نقطة الأصل . أثبت أن الوترين المرسومين فى دائرة

واللذان معادلتهما :

٣س + ٤ص + ١٠ = ٠ ، ٥س - ١٢ص + ٢٦ = ٠

متساويان فى الطول.

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢س + ص = ٥ ، س + ٥ص = ١٦

وعموديًا على المستقيم س - ص = ٨

(١١) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة أسيوط الأزهرية) ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(أ) الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، $\frac{\pi}{٣}$) هى .....

(ج) لأى مثلث اب ج يكون $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جأ} =$ .....

(د) اب ج ∆ حيث أ (٢، ١) ، ب (١، ٥) ، ج (٦، -٣) فإن إحداثى نقطة تلاقى متوسطاته .....

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢، -٥) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ (٣، ١) متجه اتجاه له.

(ب) إذا كانت أ (١، -٤) ، ب (٦، ٦) أوجد إحداثى جـ التى تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

٣ (أ) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣، ٥) إلى المستقيم :

$\overrightarrow{ر} = (-١، ٢) + ك(٤، -٣)$

(ب) أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع $\overrightarrow{وأ}$ حيث $\overrightarrow{وأ} = (٤، ٣\sqrt{})$

٤ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص = ٨ ، س - ص - ١ = ٠ يوازى محور الصادات.

(ب) إذا كان ك $\|\overrightarrow{٤أ}\| = \|\overrightarrow{-١٣}\|$ أوجد ك

(١٢) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة القاهرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن السؤال الآتى (اجباريا) :

١ أكمل ما يأتى :

(أ) البعد بين المستقيمين : ص - ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى .....

(ب) إذا توازى المستقيمان : أس + ٣ص - ٧ = ٠ ، ٢س + ٣ص - ٥ = ٠ فإن أ = ...

(جـ) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٣ هى .....

(د) إذا كانت النقطة (٣، ٦) هى نقطة تنصيف $\overline{أب}$ حيث أ = (-٣، ٧) فإن إحداثى نقطة ب = (..... ، .....)

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) إذا كانت نقطة جـ (٢، ٥) تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١ وكانت أ (٨، ٣) ، فأوجد إحداثى نقطة ب

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠

٣ (أ) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_١$: ٣س + ٤ص - ١١ = ٠ ، $ل_٢$: س + ٧ص + ٥ = ٠

(ب) إذا كان المستقيم يمر بالنقطة و(-٣، ٥) والمتجه (-١، ٢) عمودى عليه فأوجد :

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم . (٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم .

٤ (أ) أوجد طولى الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :

٣س + ٤ص - ١٢ = ٠

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(-٢، ٤) ونقطة تقاطع المستقيمين :

س + ٢ص - ٥ = ٠ ، ٢س - ٣ص + ٤ = ٠

(١٣) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الغربية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(أ) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س - ٣ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ص - ٧ = ٠ يساوى .....

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤، -٥)$ فإن $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(جـ) إذا كان : $\|٣ك\overrightarrow{أ}\| = \|-١٢\overrightarrow{أ}\|$ فإن ك = ...

(د) المتجه $\overrightarrow{م} = (٢\sqrt{١٢}، \frac{\pi}{٤})$ يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين بالصورة .....

٢ (أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٦، ك)$

أوجد قيمة ك إذا كان : (١) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

(ب) ا ب جـ مثلث أخذت ء ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ٢ ب ء = ٣ ء جـ

أثبت أن : ١٢ $\overrightarrow{ا ب}$ + ١٣ $\overrightarrow{ا جـ}$ = ١٥ $\overrightarrow{ا ء}$

٣ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٥) ويوازى المستقيم :

٣س = ٤ص − ١

(ب) أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، $\frac{٧}{٣}$) + ك(٣ ، ٤) ،

٤س − ٣ص + ١٧ = ٠ متوازيان ، وأوجد البُعد بينهما

(١٤) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة الشرقية الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن ثلاثة أسئلة فقط على أن يكون السؤال الأول إجباريا :

١ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

فإن ٢ $\overrightarrow{ا}$ − $\overrightarrow{ب}$ = ...

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = (−١ ، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (−٣ ، ك) متوازيين

فإن ك = ...

(جـ) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = صفر

يساوى .....

(ء) فى Δ ا ب جـ يكون $\overrightarrow{ا ب}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ + $\overrightarrow{ا جـ}$ يساوى .....

٢ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) وبنقطة تقاطع

المستقيمين : ٢س − ص + ٤ = ٠ ، س + ص + ٥ = ٠

(ب) إذا كان $\overrightarrow{ا}$ = (٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، −٤) أوجد قيمة ك إذا كان :

(١) $\overrightarrow{ا}$ // $\overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{ا}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

(أ) مستقيم يمر بالنقطة أ(١ ، −١) ، $\overrightarrow{ى}$ = (١ ، ٢) متجه اتجاه له ،

أوجد الصورة المتجهة للمستقيم ، الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

(ب) إذا كانت : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١) ،

أوجد إحداثى نقطة جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(أ) دائرة مركزها نقطة الأصل ، أثبت أن الوترين المرسومين فى الدائرة

٤ والذان معادلتاهما : ٣س + ٤ص + ١٠ = ٠ ، ٥س − ١٢ص + ٢٦ = ٠

متساويان فى الطول .

(ب) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

ل١ : س − ٢ص + ١ = ٠ ، ل٢ : ٢س − ٦ص + ٥ = ٠

(١٥) امتحان (الإدارة المركزية لمنطقة البحيرة الأزهرية) ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

• أجب عن السؤال الآتى (إجباريا) :

١ **أكمل ما يأتى :**

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٣)

فإن : $\overrightarrow{ا}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ = (..... ، .....)

(ب) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{١}{٢}$ ، −٢ يساوى .....

(جـ) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه الاتجاه

له (٣ ، ٤) هى .....

(ء) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠

يساوى .....

• أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

٢ (أ) إذا كان : ك $\| \overrightarrow{٤ا} \|$ = $\| -٣ \overrightarrow{ا} \|$ فأوجد قيمة ك

(ب) إذا كانت : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −١)

أوجد إحداثى نقطة جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

٣ (أ) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣س − ٥ص − ١ = ٠ ،

كس − ص − ٣ = ٠ يساوى ٤٥° ، أوجد قيمة ك

(ب) أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك(١ ، −٢) ،

٢س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ، ثم أوجد أقصر بُعد بينهما

المرشد

فى المراجعة العامة والنهائية
فى الرياضيات

إرشادات امتحانات
الجبر وحساب المثلثات
والهندسة التحليلية

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

إعداد

سعيد جودة

سلسلة

المرشد

شرح مراجعة نهائية

سلسلة المرشد لجميع صفوف الثانوية الأزهرية

المواد العربية	المواد الثقافية	المواد الثقافية	المواد الشرعية
	القسم العلمى	القسم الأدبى	
نحو	رياضيات	جغرافيا	توحيد
صرف	فيزياء	تاريخ	حديث
بلاغة	كيمياء	منطق	تفسير
أدب	أحياء	فرنساوى	فقه
نصوص	إنجليزى	إنجليزى	ميراث
محفوظات	مستوى رفيع	مستوى رفيع	منطق
عروض		علم نفس	
		فلسفة	

حلول امتحانات الجبر وحساب المثلثات

(١) امتحان منطقة القاهرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \tan\theta$ ∴ $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = -\frac{3}{4}$ ∴ جا $\theta = -\frac{3}{4}$ جتا θ

الطالب بدل على الربع أما الثاني أو الرابع

لكن شرط المسألة $180° < \theta < 360°$

∴ θ تقع في الربع الرابع

∴ ق$(\theta) = 300°$

(٢) أب جـ ء

$= (1 + \text{ت})(1 - \text{ت})$ جا θ

$= (1 - \text{ت}^2)$ جا $\theta = 2$ جا $\theta = 1$

∴ جا $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ ق$(\theta) = 30°$

(٣) $\text{س}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 3- & 2- \\ 4- & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3- & 2- \\ 4- & 2 \end{vmatrix} = -6 - (8) = -14$

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 3- & 2- \\ 4- & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7}- \end{pmatrix}$

(٤) مساحة القطاع

$= \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times$ مساحة سطح الدائرة

$= \frac{\theta}{360} \times \pi \times 3^2$

$= 9\pi$ وحدة مربعة

$= 18{,}85$ وحدة مربعة

(٥) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\text{ت} \\ \frac{1}{2}-\text{ت} & 1 \end{vmatrix} = 1 - (\frac{1}{4} + 1) = -\frac{1}{4}$

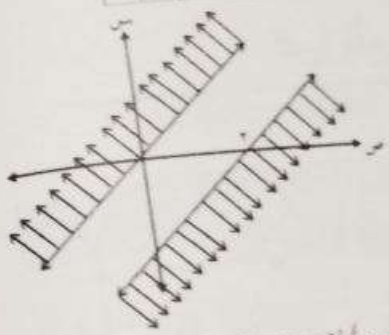
$= 1 - (\frac{5}{4}) = -\frac{1}{4}$

$15 = 1 - 2 + \frac{1}{\Delta} + 6$

$14 = \frac{1}{\Delta} + 6$

(ب) ل : ٢ص − ٣س = ٠

س	٠	١
ص	٠	$\frac{3}{2}$



(٠، ١) لا تحقق المتباينة

∴ الحل كما في الرسم

ل : −٣س + ٢ص = −٦

س	٠	٢
ص	٣−	٠

(٠، ٠) ∈ حل المتباينة

ملحوظة $\text{م}_1 = \frac{3}{2}$ ، $\text{م}_2 = \frac{3}{2}$

∴ $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

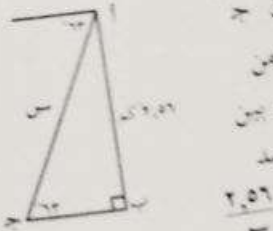
∴ مجموعة الحل = ∅

(جـ) باعتبار أن جـ هو شخص ما

س هو البعد بين النقطة والواصد

∴ جا ٦٣ = $\frac{2{,}56}{\text{س}}$

∴ س = $\frac{2{,}56}{\text{جا}\,63} = 2{,}873$ كم ≈ ٢٨٧٣ متر



(أ) (١) $\begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = حل للمتباينتين

ولإثبات أن المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب}+\text{جـ} & 2\text{أ} \end{pmatrix}$

∴ $\frac{1}{2} = \text{أ}$ ، ب + جـ = ٠

$\frac{1}{2} = \text{د}$ ∴ $1 = 2\text{أ}$

∴ عناصر المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

∴ المجموع لهذا العناصر

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{ب} + \text{جـ} = 1$

حيث ب + جـ = صفر

(٤) نفرض أن بعد القسمة على ٥ المتساوية الأولى التي ستكون على شكل :

$\frac{3}{5}$ جا $\theta + \frac{4}{5}$ جتا $\theta = 1$

نفرض أن جا $\beta = \frac{3}{5}$ ∴ جتا $\beta = \frac{4}{5}$

∴ الشكل يصبح :

جا β جا θ + جتا β جتا $\theta = 1$

من قانون جيب التمام

∴ الطرف الأيمن يصبح جتا $(\theta - \beta) = 1$

∴ $\theta - \beta =$ صفر ∴ $\theta = \beta$

∴ المطلوب ٣ جتا θ − ٤ جا θ

$= 3 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{3}{5} =$ صفر

ملحوظة : رقم (٣) ، (٤) من مسائل المتفوقين جدا

(٥) ∵ ق(ب جـ أ) المحيطة = ٣٠°

∴ ق(ب م أ) المركزية

المشتركة مع القوس $\overset{\frown}{\text{ب أ}}$

= ٦٠°

∵ م ب = م أ

، ق(ب م أ) = ٦٠°

∴ المثلث متساوي الأضلاع

∴ ع = ٧ سم

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}$ ع^2 (ق$^\circ(\theta)$ − جا θ)

∵ جا θ = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ $\theta^\circ = \frac{60}{180} \times \pi = \frac{\pi}{3}$

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}$ ع^2 (ق$^\circ(\theta)$ − جا θ)

$= \frac{1}{2} \times 49 (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) \simeq 4{,}4$ سم^2

(ب) بالضرب في الطرف الأيمن

$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{س} + 9 & 3\text{ص} + 14 \\ 5\text{س} + 15 & 5\text{ص} + 28 \end{pmatrix}$

بالمقارنة :

٣س + ٩ = ٧ ∴ س = −١

١٤ + ٣ص = ٨ ∴ ص = −٢

∴ قيمة س = −١ ، قيمة ص = −٢

(جـ) الطرف الأيمن

$= \frac{\frac{\theta\text{جا}}{\theta\text{جتا}}}{\frac{1}{\theta\text{جتا}} \times \frac{1}{\theta\text{جا}}} + \frac{\theta\text{جا}\,\theta\text{جتا}\,\theta}{\theta\text{جتا}\,\theta}$

$=$ جتا$^2\theta$ + جا$^2\theta = 1$

= الطرف الأيسر

(٢) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}((-4+10+9)-(-12-5-6))$

$= \frac{1}{2} \times 38 = 19$ وحدة مربعة

(٢) مساحة القطاع $= \frac{1}{2}\theta^{c}\,نق^{2}$

أو $= \frac{\theta^{c}}{2\pi} \times$ مساحة الدائرة

∴ مساحة القطاع $= \frac{1}{2}\theta^{c}\,نق^{2}$

$= \frac{1}{2} \times 2{,}1 \times 49 = 51{,}45$ سم^2

(٣) (٠ ، ٢) تمر بالمنحنى ، ∴ تحققه

∴ صفر $= 14 + ب$ ..... (١)

∵ (-١ ، -٣) تمر بالمنحنى ∴ تحققه

∴ $-3 = أ + ب$ ..... (٢)

باستخدام المصفوفات

ضع $أ = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

∴ المصفوفة معكوسها $\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

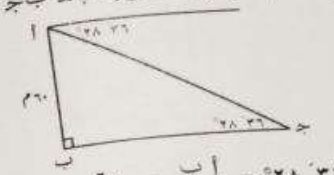
$ص = أ^{-1} ج = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\therefore ص = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

أكمل ستجد أ = ١ ، ب = -٤

(٤) نفرض أن $\overline{أب}$ ارتفاع البرج ،

، ج هو الجسم المرصود المطلوب البعد $\overline{ب ج}$



∵ ظا ٢٨° ٣٦' $= \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{60}{ب ج}$

∴ ب ج $= \frac{60}{ظا\ 28° 36'} \simeq 110$ م

(٥) $\begin{vmatrix} 2 & 2س \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$

∴ ٦س - ٨ = ١٠ ، ٦س = ١٨

∴ س = ٣

(٢) (أ) (١) مساحة القطة الدائرية :

$= \frac{1}{2}نق^{2}(\theta^{c} - جا\theta)$

∵ $\theta^{c} = \frac{ل}{نق} = \frac{5}{10} = (\frac{1}{2})^{c}$

$س^{\circ}\theta = \frac{180}{\pi} \times \theta^{c} = \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{2}$

$= 28° 38' 52''$

∴ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2} \times 100(\frac{1}{2} - جا\ 28° 38' 52'')$

$\simeq 1{,}03$ سم^2

(٢) $2س - 3ص = 3$

$س + 2ص = 5$

$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 7$

$\Delta_س = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 15 = 21$

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$

$\therefore س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3$

$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$

∴ مجموعة الحل $= \{(3 ، 1)\}$

(٣) $س \geq 0$ ، $ص \geq 0$

∴ الحل يقع فى الربع الأول

ل$_1$: $2س + ص = 15$

ل$_2$: $3س + ص \leq 15$

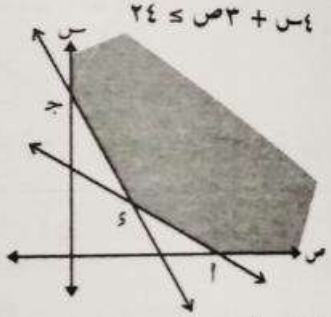
س	٠	٥
ص	١٥	٠

ل$_3$: $4س + 3ص \leq 24$

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينة :

$4س + 3ص \leq 24$



لإيجاد النقطة يوجد على الرسم ثلاث نقاط

ا = (٦ ، ٠) ، ج = (٠ ، ٨)

∵ ء هى نقطة تقاطع المستقيم

$2س + ص = 15$ ، $4س + 3ص = 24$

∴ نقطة التقاطع : ء $= (\frac{21}{5} ، \frac{12}{5})$

$م(ا) = 3 \times 0 + 2 \times 6 = 12$

$م(ج) = 3 \times 8 + 2 \times 0 = 24$

$م(ء) = 3 \times \frac{12}{5} + 2 \times \frac{21}{5}$

$= \frac{78}{5} = 15\frac{3}{5}$

أقل ما يمكن عند (٦ ، ٠)

(٤) ∵ $أ ب = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$أ ب = \begin{pmatrix} 3+12 & 1-3 & 2+3 \\ 15+8 & 5-2 & 10+2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 15 & -2 & 5 \\ 23 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

∵ $2 س^{-1} = أ ب + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 8 \\ 20 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

∵ $س^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

∴ $س = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

(٥) المعادلة : $4 جا^{2}\theta - 3$ جا θ حتا $\theta =$ صفر

جا θ (٤ جا $\theta - 3$ حتا θ) = صفر

∴ جا $\theta =$ صفر أ، 4 جا $\theta = 3$ حتا θ

∴ ظا $\theta = \frac{3}{4}$ | ق$(\hat{\theta})$

$= \{0° ، 180° ، 360°\}$ | ق$(\hat{\theta}) = 12' 52° 36°$

مجموعة الحل

$= \{0° ، 180° ، 360° ، 12' 52° 36°\}$

(٣) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & س \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س+3- & 2-3 \\ س+2- & 2-2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س+3- & 1 \\ س+2- & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $س = 3$ ⇐ $-3 + س = 0$

$\therefore$ $س = 3$ ⇐ $-2 + س = 1$

(٢) $\text{ظا}^2\theta + 1 = \text{قا}^2\theta$

$\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta = 1$

$(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta)(\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta) = 1$

$\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta = \frac{1}{\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta}$

(٣) النقطة $(٤ ، ٣)$ لا تحقق $\text{ص} > ٣$

النقطة $(٣ ، ٣)$ لا تحقق $\text{ص} > ٣$

$(١ ، ٣)$ لا تحقق $\text{س} + \text{ص} < ٤$

إذن تحقق كل المتباينات هي $(٢ ، ٣)$

(٤) المحيط $= ٢\pi\text{ع} + ١٠$

$٢٤ = ٢\pi\text{ع} + ١٠$

$١٤ = ٢\pi\text{ع}$

$\therefore ١٤ = \pi\text{ع} \Leftarrow \text{ع} = ٧$ سم

المساحة المقطوع $= \frac{١}{٢}$ ل ع ع

$= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٧ = ٣٥$ سم^2

(ب) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix} = -(\text{ب ا})$

$-(\text{ا ب}) = -\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix}$

$(\text{ا} + \text{ب}) = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$

$\text{ب} = (\text{ا} + \text{ب}) - \text{ا}$

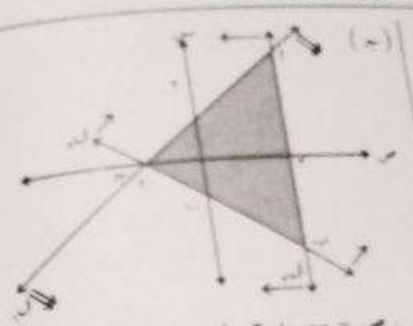
$= \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix}$

$\text{ا ب} = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٢- & ١٢- \\ ٤ & ٢٤- \end{pmatrix}$

(ج)



ل $\text{ص} = \text{س} + ٢$ ، ل$_٢$: $\text{س} + ٢\text{ص} = ٢-$

س	٢-	٠	س	٠	٢-
ص	٠	٢	ص	١-	٠
حل المتباينة ل$_١$	$(٠ ، ٠) \in$ مجموعة		حل المتباينة ل$_٢$	$(٠ ، ٠) \in$ مجموعة	

المثلث ا ب ج هو الجزء المظلل هو حل المتباينات

حيث ج $= (٢- ، ٠)$

ا $= (٥ ، ٣)$ ، ب $= (\frac{٥-}{٢} ، ٣)$

(٢) (أ) (١) $\because (\text{ا ب}^{-1})^{-1} = (\text{ب}^{-1})^{-1}\text{ا}^{-1}$

$= \text{ب ا}^{-1}$

(٢) مساحة القطة الدائرة

$= \frac{١}{٢}$ ع^2 $(\theta^2 - \text{حا}\theta)$

(٣) سبق حلها في الفلبوبية ج ١ (١)

(٤) حتا $(\theta - ٩٠) = ١ \Leftarrow$ حا $\theta = ١$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة $= ٢\pi ك + \frac{\pi}{٢}$

حيث ك $\in$ ص

(ب) $\text{س} + ٣\text{ص} = ٥$ ، $٢\text{س} + ٥\text{ص} = ٨$

المعادلات الصورة أ س $=$ جـ

حيث أ $= \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، س $= \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، جـ $= \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

(٣) تابع فك المحدد

$= (٨\text{س} + \text{صفر}) - (٥)$

$\therefore ٨\text{س} - ٥ = ١١ \Leftarrow ٨\text{س} = ١٦$

$\boxed{\text{س} = ٢}$

(٤) أجب بنفسك

(ب) المساحة للمثلث $= \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ ٣- & ٢- & ١ \end{vmatrix}$

$= \frac{١}{٢}((٤ - ١٠ - ١٢) - (-٦ - ٤ + ٢٠))$

$= \frac{١}{٢} \times ٢٨-$

$\therefore$ المساحة القيمة المطلقة $= ١٤$ وحدة مربعة

(جـ) θ^2 (جـ) $= \pi \times \frac{١٢٠}{١٨٠} = \pi(\frac{٢}{٣})^2$

حا $١٢٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ مساحة القطعة الدائرة

$= \frac{١}{٢}$ ع^2 $(\theta^2 - \text{حا}\theta)$

$= \frac{١}{٢} \times ٦٤(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \pi\frac{٢}{٣}) \simeq ٣٩$ سم^2

(٢) (أ) (١) $\because$ حا$^2\theta$ + حتا$^2\theta = ١$

$\therefore$ المقدار $= ١ + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

(٢) المتماثلة ا $= \text{ا}^{-1}$

$\therefore \begin{pmatrix} ٤ & ٢\text{س} - ١ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٢\text{س} - ١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore ٢\text{س} - ١ = ٧ \quad \therefore ٢\text{س} = ٨$

$\therefore \boxed{\text{س} = ٤}$

(٣) ٢حتا $\theta = ١-$ $\therefore$ حتا $\theta = -\frac{١}{٢}$

تقع في الربع الثالث أو الرابع $\therefore \theta$ في الربع الثالث ٢٤٠° ، ولا تقع في الربع الرابع .

(٤) $\because$ ب$^{-1}$ على نظم ١ × ٣

$\therefore$ ك على نظم ٣ × ١

$\therefore$ أ × ب = ٢ × ١

(ج) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix} = \text{جـ}$

محدد المصفوفة ا $= \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ - ٦ = ١-$

$\therefore$ المصفوفة لها معكوس

$\text{ا}^{-1} = \frac{١}{١-}\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٣- \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \text{ا}^{-1}\text{جـ} \quad \begin{pmatrix} ٣ & ٥- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix} = \text{ا}^{-1}$

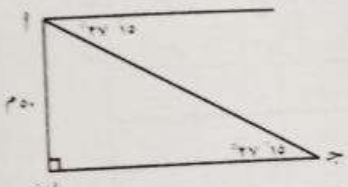
$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٤ + ٢٥- \\ ٨ - ١٠ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= -١$ ، ص $= ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{(-١ ، ٢)\}$

(جـ)



نفرض أن $\overline{\text{أ ب}}$ ارتفاع البرج المطلوب $\overline{\text{ب جـ}}$

$\because$ ظا ١٥′ ٢٧° $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٥٠}{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ ب جـ $= \frac{٥٠}{\text{ظا ١٥′ ٢٧°}} \simeq ٩٧$م

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) محدد المصفوفة $= \begin{vmatrix} ١٢ & \text{أ} \\ \text{أ} & ٣ \end{vmatrix} = ٣٦ - \text{أ}^2$

ضع المحدود = صفر

$\therefore \text{أ}^2 = ٣٦ \quad \therefore$ أ $= \pm ٦$

$\therefore$ المصفوفة لها معكوس ضربي عند أ $= \pm ٦$

(٢) $\because ٣ + \text{ظتا}^2\theta$

$= ٢ + (١ + \text{ظتا}^2\theta) = ٢ + \text{قتا}^2\theta$

$= ٢ + ٥ = ٧$

(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) (١) ملحوظة ١ على نظم ٣ × ١

ب على نظم ٣ × ١

العملية الآتية التى يمكن إجراءها هى أ ب

(٢) ١ + ظا^{٢} θ = قتا^{٢} θ

(٣) بالقسمة على حتا س

∴ ظا س + ١ = ٠ ∴ ظا س = −١

∴ و(س) = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {٣١٥°}

(٤) (١ ، ٣) لا تحقق ص < ٠

(١ ، ٢) لا تحقق ص < ٠

(١ ، ٣) لا تحقق ص < ٠

∴ (٣ ، ٢) تحقق المتباينات كلها

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل يقع فى الربع الأول

لـ : ٣س + ٣ص = ١٨

س	٠	٩
ص	٦	٠

∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

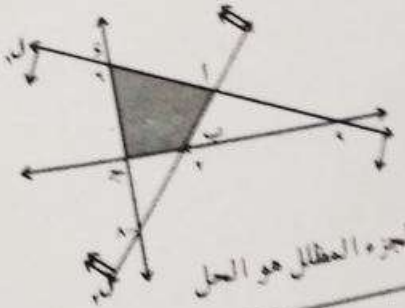
٣س + ٣ص ≥ ١٨

لـ : −٤س + ص = −٨

س	٠	٢
ص	−٨	٠

∴ (٠ ، ٠) ∈ مجموعة حل المتباينة

−٤س + ص ≤ −٨



الجزء المظلل هو الحل

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ يقع فى الربع الأول

لـ : س + ص = ٤ ، (٠ ، ٠)

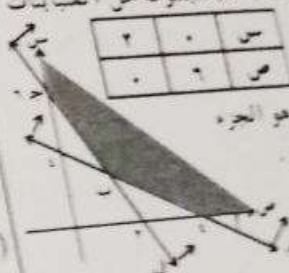
∉ مجموعة حل المتباينة

س	٠	٤
ص	٤	٠

لـ : ٣س + ص = ٦

(٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتباينات

س	٠	٢
ص	٦	٠



الحل هو الجزء المظلل .

نقطة التى تعوض فى دالة الهدف هى أ = (٤ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٦)

نكون النقطة ب نقطة تلاقى المستقيمين النقطة ب (٣ ، ١)

س + ص = ٤

٣س + ص = ٦

∴ و(٤ ، ٠) = ٣ × ٤ + ٠ × ٢ = ١٢

و(٠ ، ٦) = ٣ × ٠ + ٢ × ٦ = ١٢

و(٣ ، ١) = ٣ × ٣ + ١ × ٢ = ٩

القيمة الصغرى لدالة الهدف عندما (٣ ، ١)

أ ب تقع الجزء

نقطة ب = (٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٠)

= (٦ ، ٠) أما "أ" فهى نقطة تقاطع المستقيمين

٣س + ٣ص = ١٨ ∴ أ = (٤ ، ٣)

−س + ص = −٨

و(٠ ، ٢) = ٣ × ٢ + ٠ × ٢ = ٤

و(٦ ، ٠) = ٣ × ٠ + ٦ × ٢ = ٦

و(٠ ، ٠) = صفر

و(٤ ، ٣) = ٣ × ٢ + ٤ × ٣ = ١٠

عندما القيمة العظمى لدالة الهدف .

لـ : أ مـ = جـ

س + ٤ص = ١

٤س − ٧ص = −١٢

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{محدد أ} = \Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -٧ & ٥ \end{vmatrix}$$

= −٢١ − ٢٠ = −٤١ ≠ ٠

∴ لها معكوس ضربى

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٤١} \begin{pmatrix} ٥ & -٧ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$\because \text{س} = \text{أ}^{-١} \text{ ج حيث ج} = \begin{pmatrix} ١ \\ -١٢ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{١}{-٤١} \begin{pmatrix} ٥ & -٧ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ -١٢ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٤١} \begin{pmatrix} -٧ + ٤٨ \\ -٥ - ٣٦ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٤١} \begin{pmatrix} ٤١ \\ -٤١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = −١ ، ص = ١

مجموعة الحل = {(−١ ، ١)}

(٢) (أ) (١) المحيط = ٢ق + ل = ١٢

∴ ٢ق + ٦ = ١٢

∴ ٢ ق = ٦

∴ ق = ٣

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل ق

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ سم^{٢}

(٢) قيمة المحدد = حاصل ضرب القطر الرئيسى = −١ × ٣ × −٢ = ٦

(٣) ٢أ − ١ = ٣ ⇐ ٢أ = ٤

∴ أ = ٢

٣ب + ١ = ٧ ∴ ٣ب = ٦

∴ ب = ٢

(٤) حا ٤٧ = $\frac{\text{ص}}{٧}$

∴ ص = ٧ حا ٤٧

ص = ٥,١ سم

حتا ٤٧ = $\frac{\text{س}}{٧}$ ∴ س = ٧ حتا ٤٧

∴ س = ٤,٨ سم

(ب) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ ((−٢ + ٩ + ٨) − (−٤ − ٦ − ٦))

= $\frac{١}{٢}$ (١٥ − (−١٦))

= $\frac{١}{٢}$ × ٣١ = ١٥,٥ وحدة مربعة

(جـ) ∵ م أ = م ب

∴ المثلث م أ ب المتساوى الأضلاع

∴ م أ = م ب

= ق = ٨ سم

مساحة القطة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ ق^{٢} θ = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ × $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{٦٤\pi}{٦}$ = $\frac{٣٢\pi}{٣}$ سم^{٢}

حيث $\theta^{\circ} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60$

$\therefore$ حا θ = حا $60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2} نق^2 (\theta - \text{حا} \theta)$

$= \frac{1}{2} \times 64 (\frac{\pi}{3} - \text{حا} 60) = 5,8$ سم^2

(٦) امتحان منطقة الأقصر ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(١) (أ) $\because \begin{vmatrix} س & ص \\ ٤ & ل \end{vmatrix} = ٣$

$\therefore$ (س ل − ٤ ص) = ٣ ..... (١)

لكن $\begin{vmatrix} ٣س & ٥ص \\ ٤ & ل \end{vmatrix} = ١٠$ س ل − ١٠ ص ٤

$= ١٠$ (س ل − ص ٤) من (١)

$\therefore$ الناتج = ١٠ × ٣ = ٣٠

(٢) (١، ٢) $\notin$ الحل

لأنه لا يحقق س > ٢

(١، ٢) لا تحقق المتباينة س > ٢

(١، ٣) لا تحقق ص > ١

$\therefore$ (٢، ٣) تحقق المتباينات معًا

(٣) $\because$ ١ + ظا^2 أ = قا^2 أ

$\therefore$ ١ + ظا^2 أ = ١٥ $\therefore$ ظا^2 أ = ١٤

(٤) $\because$ ص = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ ، ل = ١٦ سم

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل ص

$= \frac{1}{2} \times ١٦ \times ٩ = ٧٢$ سم^2

(ب) $\because$ ب = (أ ب + أ ج)$^{-1}$

$\therefore$ س = (أ (أ ب + ج))$^{-1}$

= (أ ب + ج)$^{-1}$ أ$^{-1}$

$\therefore$ س = (أ$^{-1}$ ب + ج$^{-1}$) أ$^{-1}$

ب = (أ$^{-1}$ ب + ج$^{-1}$) أ$^{-1}$ ..... (١)

$\because$ أ = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ $\therefore$ أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

ب = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤ + ٠ & ٢ + ٣ \\ ٦ + ٠ & ٣ + ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -١ \\ -٦ & ٣ \end{pmatrix}$

(ج) $\theta = \frac{ل}{نق} = \frac{10}{12} = (1)^{\circ}$

$\therefore \theta^{\circ} = 1 \times \frac{180}{\pi} = \frac{180}{\pi} = 57^{\circ}\ 17'\ 45''$

حا θ = ٠,٨٤١٤٧

$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2} نق^2 (\theta^{\circ} - \text{حا} \theta)$

$= \frac{1}{2} \times ١٤٤ (١ - ٠,٨٤١٤٧)$

= ١١,٤١٤ سم^2

(٢) (أ) (١) $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{قتا}\theta & \text{ظتا}^2\theta \\ ١ & \text{قتا}\theta \end{vmatrix}$

$= (\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta)(-١٤ + ١٥)$

$= \text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta = ١$

لأن: ١ + ظتا$^2\theta$ = قتا$^2\theta$

(٢) مساحة أى مضلع منتظم

$= \frac{1}{4} ن س^2$ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

والشكل ثمانى $\therefore$ الزاوية $\frac{\pi}{8} = \frac{45}{2}$

$\therefore$ مساحة الثمانى المنتظم

$= \frac{1}{4} \times ٨ \times (٧)^2 \times$ ظتا $\frac{45}{2}$

$= ٢ \times ٤٩ \times \frac{1}{\text{ظا}\frac{45}{2}} = ٢٣٦,٥٩$ سم^2

(٣) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣س + ٢ص \\ س + ٤ص \end{pmatrix}$

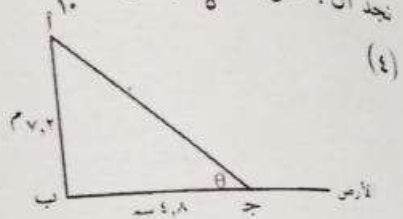
$\therefore$ ٣س + ٢ص = ٠ ،

$\therefore$ س + ٤ص = ١

بحل المعادلتين:

نجد أن: س = $\frac{-١}{٥}$ ، ص = $\frac{٣}{١٠}$

(٤)



بفرض أن ($\hat{\theta}$) زاوية ارتفاع الشمس

$\therefore$ ظا $\theta = \frac{٧,٢}{٤,٨}$

$\therefore$ ق($\hat{\theta}$) = ٥٦° ١٨' ٣٦"

(ب) حا θ + حتا $\theta = \frac{٣}{٢}$ بالتربيع للطرفين

حا$^2\theta$ + حتا$^2\theta$ + ٢ حا θ حتا $\theta = \frac{٩}{٤}$

٢ حا θ حتا $\theta = ١ - \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore$ حا θ حتا $\theta = \boxed{\frac{٥}{٨}}$

(جـ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

$\therefore$ الحل تقع فى الربع الأول

ل$_1$: س + ص = ٦

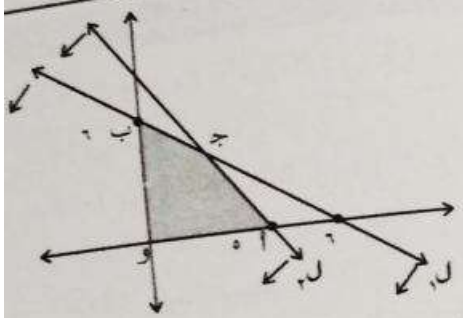
س	٠	٦
ص	٦	٠

(٠، ٠) ∋ مجموعة حل المتباينة : س + ص = ٦

ل$_2$: ٢س + ص = ١٠

س	٠	٥
ص	١٠	٠

(٠، ٠) ∋ مجموعة حل المتباينة ٢س + ص ≥ ١٠



الجزء المظلل هو حل المتباينات

حيث و = (٠، ٠) ، أ = (٥، ٠)

ب = (٠، ٦)

أما نقطة "جـ" فهى نقطة تقاطع المستقيمين

٢س + ص = ١٠ ، س + ص = ٦

بحلهما نجد وهى جـ = (٤، ٢)

$\therefore$ دالة الهدف ق = ٤س + ص

ق (٠، ٠) = صفر

ق (٥، ٠) = ٤ × ٥ + ٠ = ٢٠ عظمى

ق (٠، ٦) = ٠ + ٦ = ٦

ق (٤، ٢) = ٤ × ٤ + ٢ = ١٨

$\therefore$ القيمة العظمى عند أ = (٥، ٠)

سلسلة

المرشد

شرح مراجعة نهائية

سلسلة المرشد لجميع صفوف الشهادة الإعدادية الأزهرية

(٧) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) م(٠،٠) = ٠ ، م(١٠،٠) = ١٠٠

م(٠،٤٠) = ٤٠٠ ،

م(٢٠،١٠) = ٣٥ × ٢٠ + ١٠ × ١٠ = ٨٠٠

∴ القيمة العظمى عند (٢٠،١٠)

(ب) ∵ قيمة المحدد = أ٢ - ٣٦

ضع أ٢ - ٣٦ = ٠

∴ أ٢ = ٣٦ ∴ أ = ± ٦

∴ قيم أ التي تجعل للمصفوفة معكوساً ضربياً هي ح - {٦، -٦}

(جـ) ∵ قتا(θ - ٩٠°) = $\frac{١}{\text{حا}(\theta - ٩٠°)}$

∴ حا(θ - ٩٠°) قتا(θ - ٩٠°) = ١

(د) المحيط = ل + ٢ع = ٤ + ١٠

= ١٤ سم

(٢) (أ) ∵ س + ٨ = ٣٨ ∴ س = ٣٠

∵ -ص = ٤ص - ١٠ ∴ ص = ٢

∴ $\begin{pmatrix} ٣٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٦ ٦٠) = (٦٦)

(ب) الطرف الأيمن = $\frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}\theta} + \frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}\theta}$

= $\frac{\text{حا}^٢\theta + \text{حا}^٢\theta}{\text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta}$ = $\frac{١}{\text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta}$

= $\frac{١}{\text{حا}\theta} \times \frac{١}{\text{حتا}\theta}$ = قا θ قتا θ = الأيسر

(٣) (أ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ - ١ = ٥ ≠ ٠

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٠ - ٥ = ٥

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٥ - ٥ = ١٠

س = $\frac{\Delta س}{\Delta}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

مجموعة الحل = {(١، ٢)}

(ب) ∵ $\frac{س°}{١٨٠}$ = $\frac{\theta°}{\pi}$

∴ θ = $\frac{\pi \times ١٥٠}{١٨٠}$ = $\pi\frac{٥}{٦}$ ≃ ٢,٦١٧٩ ق

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ ع٢ (θ - حا θ)

= $\frac{١}{٢} \times ٢٥$ (٢,٦١٧٩ - حا ١٥٠)

≃ ٢٦ سم٢

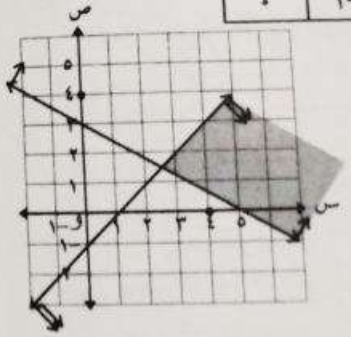
(٤) (أ) ل١ : ٣س + ٥ص = ١٥

س	٠	٥
ص	٣	٠

(٠،٠) لا تحقق المتباينة ،

ل٢ : ص = س - ١

س	٠	١
ص	-١	٠



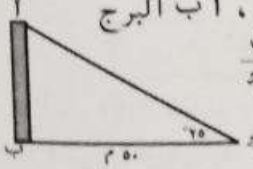
(٠،٠) لا تحقق المتباينة ، الجزء المظلل هو الحل للمتباينات .

(ب) جـ الشخص ، أ ب البرج

∵ ظا ٢٥ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ظا ٢٥ = $\frac{\text{أ ب}}{٥٠}$

∴ الارتفاع = أ ب = ٥٠ ظا ٢٥ ≃ ٢٣ م



(٨) امتحان منطقة الفليوبية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) مصفوفة المكسون متماثلة إذا كان إذا كانت أ مربعة وكانت أ = أ^مد^

ويكون لها معكوس ضربي إذا كان محدد أ ≠ صفر

(ب) مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ هـ س٢ ظا $\frac{\pi}{ن}$

حيث هـ عدد الأضلاع وطول الضلع س

∴ مساحة المضلع = $\frac{١}{٤} \times ٨ \times ٣٦$ ظا $\frac{١٨٠}{٨}$

≃ ١٧٣,٨ سم٢

(جـ) المحيط = ٢ع + ل

∴ ١٢ = ٢ع + ٣ ∴ ع = $\frac{٩}{٢}$ سم

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل ع

= $\frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٩}{٢}$ = $\frac{٢٧}{٤}$ سم٢

(د) بالفك : ٦س - ٨ = ١٠

∴ ٦س = ١٨ ∴ س = ٣

(٢) (أ) ∴ أ = (أ^مد^)^مد^ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

الطرف الأيمن = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} - ٥\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} + ٢٢\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

∴ الطرف الأيمن =

$\begin{pmatrix} ١٦-٤ & ٨+١٢ \\ ١٢-٨- & ١٦-٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٠- & ٢٠- \\ ٢٠ & ١٥- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٠ & ٢٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$

= الأيسر

(ب) مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ ع٢ (θ - حا θ)

∴ ٥٦ = $\frac{١}{٢}$ ع٢ ($\frac{\pi}{٢}$ - حا ٩٠°)

∴ ع٢ = ١٩٦,٢١٧ ∴ ع = ١٤ سم

(٣) (أ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يعني يقع الحل في الربع الأول.

ل١ : س + ٣ص = ٧

س	٠	٧
ص	٧/٣	٠

(٠،٠) ∋ المتباينة

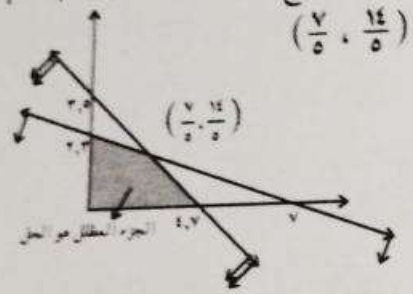
ل٢ : ٣س + ٤ص = ١٤

س	٠	١٤/٣
ص	٧/٢	٠

(٠،٠) ∋ المتباينة

نقطة التقاطع :

($\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{١٤}{٥}$)



ر١(٠،٤,٧) = ١٤١ ، ر٢(٢,٣ ،٠) = ١١٥

ر١($\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{١٤}{٥}$) = $\frac{٧}{٥} \times ٥٠ + ٣٠ \times \frac{١٤}{٥}$ = ١٥٤

∴ أكبر قيمة عندما س = $\frac{١٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٧}{٥}$

(ب) الطرف الأيمن

= حتا^٢^θ ($\frac{\text{حا}^٢\theta}{\text{حتا}^٢\theta}$ + ١)

= $\frac{\text{حتا}^٢\theta + \text{حا}^٢\theta}{\text{حتا}^٢\theta}$ × حتا^٢^θ

= حتا^٢^θ = ١ - حا^٢^θ = الأيسر

(٤) (أ) المساحة = $\frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٤- \\ ١ & ٤- & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢} \times ٤٧$ = ٢٣,٥ وحدة مربعة

(ب) ٢ص + ٣س = ٢,٥س + ص = ٣

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (٣ - ٤) = -١ \neq ٠$

∴ المصفوفة لها معكوس

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix}$

∴ $س = أ^{-١} ب = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥- + ٦ \\ ١٠- + ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

س = ١ ، ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ١)}

(٩) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) ∵ حا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ + ٢ حاθ جتاθ

− ٢ حاθ جتاθ = واحد

(ب) ∵ $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

∴ $ب^{-١} أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ١- \end{pmatrix}$

(جـ) م = $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٤- \\ ١ & ٤- & ١ \end{vmatrix}$ = ٢٣,٥

وحدة مربعة .

(د) فإن المصفوفة س = I = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) (أ) س + ص + ٣ع = ٥

ص − ع = ٠ ، ٢س − ٤ع = ٢−

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١- \\ ٢ & ٠ & ٤- \end{vmatrix}$

$= (٦) - (٤- - ٢) = (\quad) = ١٢-$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١- \\ ٢- & ٠ & ٤- \end{vmatrix}$

$= (٢٠- + ٢) - (٦-) = (\quad) = ١٢-$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١- \\ ٢ & ٢- & ٤- \end{vmatrix}$

$= (١٠-) - (\quad ٢) = (\quad) = ١٢-$

$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢- \end{vmatrix}$

$= (٢-) - (\quad ١٠) = (\quad) = ١٢-$

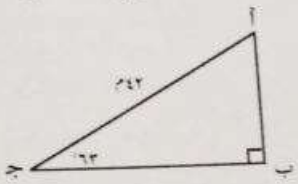
∴ س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٢-}{١٢-} = ١$

ص = ١ ، ع = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ١ ، ١)}

(ب) $\overline{أب}$ ارتفاع الطائرة

حا ٦٣ = $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب}{٤٢}$



∴ أب = ٤٢ حا ٦٣° = ٣٧,٤ م

(٣) (أ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ الربع الأول

ل$_{١}$: س + ص = ٦

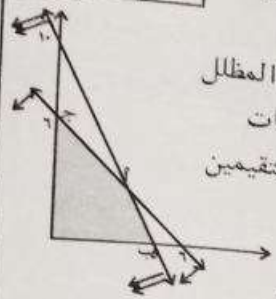
(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

س	٠	٦
ص	٦	٠

س	٠	٥
ص	١٠	٠

ل$_{١}$: ٢س + ص = ١٠

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة



الجزء أ ب و جـ المظلل

هو الحل للمتباينات

نقطة تقاطع المستقيمين

هى (٤ ، ٢)

م$_{١}$(٠ ، ٠) = ٠

م$_{٢}$(٠ ، ٥) = ٢٠ ،

م$_{٣}$(٤ ، ٢) = ١٦ + ٢ = ١٨

القيمة الصغرى عند (٠ ، ٠)

(ب) ∵ حتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{١}{٢}$

∴ حا$\theta = \frac{١}{٢}$

مجموعة الحل فى [٠ ، ٣٦٠°[هى ٣٠ ، ١٥٠

يعنى $\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi ٥}{٦}\}$

الحل العام :

$\{\frac{\pi}{٦} + \pi ٢ ك ، \frac{\pi ٥}{٦} + \pi ٢ ك\}$

حيث ك ∈ صـ

(٤) (أ) شبه متماثلة يعنى $أ = -أ^{س}$

∴ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢-س & ٥- \\ ع+٦ & ٠ & ٣ع \\ ٣ص+س & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$

$= - \begin{pmatrix} ٠ & ع+٦ & ٣ص+س \\ ٢-س & ٠ & ٦ \\ ٥- & ٣ع & ٠ \end{pmatrix}$

∴ −٢س = −ع − ٦ ..... (١)

∵ ٣ع = −٦ ∴ ع = −٢ ∵ ٣ص + س = ٥

ومن (١) ∴ ٣ص + ٢ = ٥

∴ −٢س = ع + ٦ ∴ ٣ص = ٣

∴ ٢س = −٢ + ٦ ∴ س = ٢ ∴ ص = ١

(ب) سبق حلها فى القليوبية رقم (٢) ب ٢٠١٨

(١٠) امتحان منطقة الشرقية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) س = ٥ ، ص = ٣ ∴ س + ص = ٨

(ب) ∵ أ^{٢} = ٢٥ ∴ أ = ±٥

(جـ) حا$\theta = \frac{١}{٢}$ ∴ ق$(\hat{\theta})$ = ٣٠° أ ، ١٥٠°

(د) ∵ طا$^{٢}\theta$ + ١ = قا$^{٢}\theta$

∴ طا$^{٢}\theta$ + ١ = ٥ ∴ طا$^{٢}\theta$ = ٤

(٢) (أ) م = $\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤- \\ ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٢- \end{pmatrix}$

$\frac{١}{٢}$ [(−٤ + ١٥ − ٤) − (−٢ − ٢٠ + ٦)]

= $\frac{٢٣}{٢}$ وحدة مربعة

(ب) الطرف الأيمن = حاθ × حتاθ × $\frac{\text{حا}\theta}{\text{حا}\theta}$

= حا$^{٢}\theta$ = ١ − حتا$^{٢}\theta$ = الأيسر

(٣) (أ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

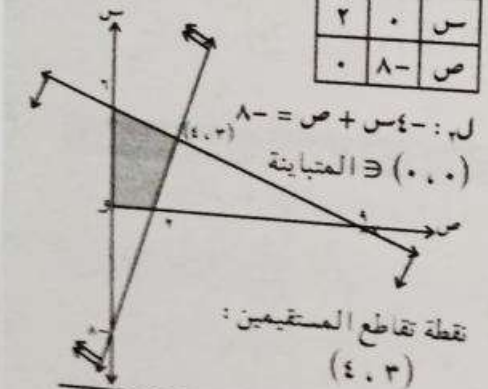
يعنى الحل فى الربع الأول

س	٠	٩
ص	٦	٠

ل$_{١}$: ٢س + ٣ص = ١٨

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

س	٠	٢
ص	٨-	٠



ل$_{٢}$: −٤س + ص = −٨

(٠ ، ٠) ∈ المتباينة

نقطة تقاطع المستقيمين :

(٤ ، ٣)

∵ ر(٠،٠) = ٠ ، ر(٢،٠) = ٤

ر(٦،٠) = ٦ ، ر(٤،٣) = ٦ + ٤ = ١٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف عندما

س = ١٣ ، ص = ٤ وتساوى ١٠

(ب) المحيط = ٢ط + ل

٢٥ = ٢ط + ٧ ∴ ٢ط = ١٨ ∴ ط = ٩

المساحة = $\frac{1}{2}$ ل ط

= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ٩ = $\frac{٦٣}{٢}$ سم٢

(٤) (أ) ∵ ص٢ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٦+٢- & -١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

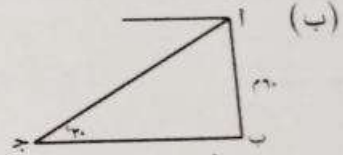
٢ص = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ ، I٣ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ الطرف الأيمن

= $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = □ = الأيسر

(ب)



∵ حا ٣٠ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ∴ حا ٣٠ = $\frac{٦٠}{\text{أ جـ}}$

∴ أ جـ = ١٢٠م

(١١) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) فإن س × ص على النظم ٣ × ١

(ب) س ″ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

(جـ) ١٦ - ٨ = ١٠ ∴ أ = ٣

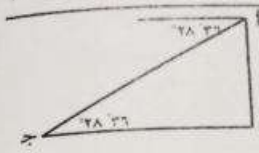
(ى) ∵ ١ + طتا٢θ = قتا٢θ

∴ ١ + ٩ = قتا٢θ ∴ قتا٢θ = ١٠

(٢) (أ) سبق برهنة ذلك الشرقية (٢) (ب) ٢٠١٨

(ب) تم حل ذلك فى الشرقية (٣)(ب) ٢٠١٨

(٣) (أ)



بفرض أن :

أ ب البرج

المطلوب طول ب جـ

∵ طا ٢٨° ٣٦′ = $\frac{٦٠}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ = $\frac{٦٠}{\text{طا ٢٨° ٣٦′}}$ ≃ ١١٠م

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ الحل يقع فى الربع الأول

ل : ٣ص + س = ١٥

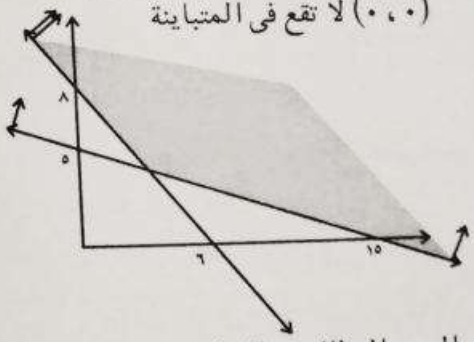
س	٠	١٥
ص	٥	٠

(٠،٠) لا تقع فى المتباينة

ل : ٤س + ٣ص = ٢٤

س	٠	٦
ص	٨	٠

(٠،٠) لا تقع فى المتباينة



الجزء المظلل هو الحل

نقطة تقاطع المستقيم (٣ ، ٤)

ر(١٥،٠) = ٣ × ٠ + ٢ × ١٥ = ٣٠

ر(٠،٨) = ٣ × ٨ + ٢ × ٠ = ٢٤

ر(٣،٤) = ٣ × ٣ + ٢ × ٤ = ١٨

∴ أقل ما يمكن عند (٣ ، ٤) وهو ١٨

(١٢) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) حا θ حتا θ × $\frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}\theta}$ = حا٢θ

∴ المقدار يساوى حا٢θ

(ب) المصفوفة أ ب على النظم ٢ × ١

(جـ) طا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ق(θ̂) = ٣٠°

(ى) التى تحقق المتباينات هى النقطة (١،١)

(٢) (أ) سبق حلها فى القليوبية

رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

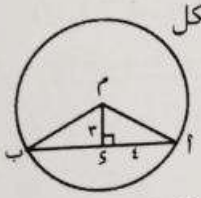
(ب) سبق حلها فى الشرقية

رقم (٣) (أ) ٢٠١٨

(٣) (أ) سبق حلها فى الشرقية

رقم (٢) (أ) ٢٠١٨

(ب) من هندسة الشكل



ط ا م = $\frac{٤}{٣}$

ط ا م = ٥ سم

∴ ق(ا م ى) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ قياس الزاوية المركزية (ا م ب)

= ١٠٦° ١٥′ ٣٧″

∴ حا ١٠٦° ١٥′ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ،

θ ″ = $\frac{١٠٦}{١٨٠}\pi$ ≃ ١,٨٥٤٦ ،

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{١}{٢}$ ط٢ (θ ″ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ٠,٨٩٤٥ ≃ ١١ سم٢

(٤) (أ) س + ٣ص = ٥

٢س + ٥ص = ٨

∵ أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = ∴ ،

جـ = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

∵ Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ - ٦ = -١ ≠ ٠

∴ المصفوفة لها معكوس

∴ أ$^{-١}$ = $\frac{١}{-١}\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

∵ ∴ = أ$^{-١}$ جـ

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢٥-٢٤ \\ ١٠-٨ \end{pmatrix}$

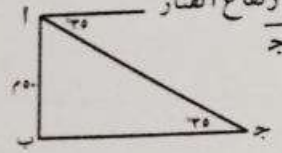
∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ س = -١ ، ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(-١ ، ٢)}

(ب) أ ب ارتفاع الفنار

المطلوب أ جـ



حا ٣٥ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{٥٠}{\text{أ جـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{٥٠}{\text{حا}٣٥}$ ≃ ٨٧م

(١٣) امتحان منطقة اسيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) أ + أ ″ = □

فإن أ شبه متماثلة لأن أ ″ = -أ

(ب) $\text{ظا}\theta = \frac{1}{\text{ظتا}\theta} = \frac{1}{\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}} \times \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

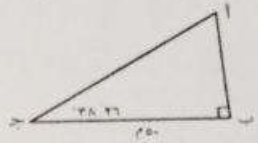
(جـ) النقطة هى (٣ ، ٢)

(د) المساحة $= \frac{1}{2}$ ل ع

$= \frac{1}{2} \times ٦ \times ٤ = ١٢$ سم^٢

(٢) (أ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (-٤ \times ١ + ١٢) = ٧$

(ب)



$\overline{أب}$ ارتفاع البرج

$\frac{\text{ظا}\ ٣٨° ٢٦'}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{٥٠}$

$\therefore$ أ ب $= ٥٠$ ظا ٣٨° ٢٦' $\simeq ٤٠$ م

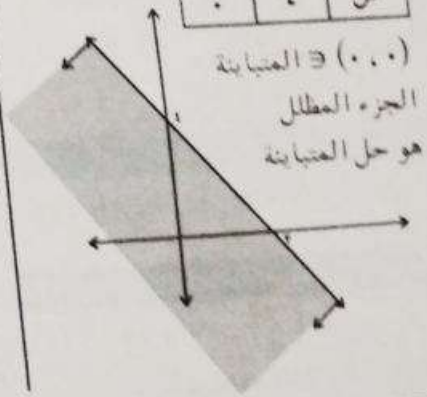
(٣) (أ) مساحة $\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{matrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|(-٤ + ٩ + ٤) - (٨ + ٣ + ٦)|$

$= ٨$ وحدة مربعة

(ب) ل : ٢س + ص $= ٤$

س	٠	٢
ص	٤	٠

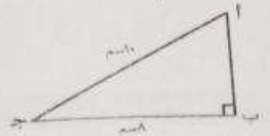


(٠ ، ٠) $\in$ المتباينة

الجزء المظلل

هو حل المتباينة

(٤) (أ) مساحة $\Delta = \frac{1}{2} \times ٨ \times ٦ = ٢٤$ سم^٢



(ب) سبق حلها فى الشرقية (٤) (أ)

(١٤) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) س $- ٣$ص $= -٤$ ..... (١)

٢س $+$ ص $= ٢$ ..... (٢)

بضرب المعادلة (١) $\times -٢$

$\therefore -٢$س $+ ٦$ص $= ٨$

٢س $+$ ص $= ٢$

٧ص $= ١٠$ $\therefore$ ص $= \frac{١٠}{٧}$

، عوض فى (١) :

$\therefore$ س $= -٤ + \frac{٣٠}{٧} = \frac{٢}{٧}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{(\frac{٢}{٧} ، \frac{١٠}{٧})\}$

(ب) $\because$ محيط القطاع $= ٢$ع $+$ ل $= ١٠$

$\therefore ٢$ع $+ ٢ = ١٠$ $\therefore$ ع $= ٤$ سم

$\because$ المساحة للقطاع $= \frac{1}{2}$ ل ع

$= \frac{1}{2} \times ٢ \times ٤ = ٤$ سم^٢

(جـ) $\because$ جا$^٢\theta$ $+$ جتا$^٢\theta$ $+ ٢$ جاθ جتاθ

$+$ جتا$^٢\theta - ٢$ جاθ جتاθ $=$ واحد

(د) عدد العناصر $= ٩$

(٢) (أ) الطرف الأيمن $= \frac{\text{جتا س} \times \text{ظا س}}{\text{ظتا س}}$

$= \text{جتا س} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \text{جا س}$

$= \text{جا}^٢$س $= ١ - \text{جتا}^٢$س $=$ الأيسر

(ب) الطرف الأيمن

$= \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ -٦ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square =$ الطرف الأيسر

(٣) (أ) $\because$ س$^{-١} = \frac{1}{-١}\begin{pmatrix} -أ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

س $= \begin{pmatrix} أ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} =$

ملحوظة : $\Delta = \begin{vmatrix} أ & ١ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} = -١ \neq ٠$

(ب) θ' $= \frac{\text{ل}}{\text{ع}} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore \theta° = \frac{١٨٠°}{\pi} \times \frac{٥}{٣} \simeq ٩٥°\ ٣٠'$

مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}$ ع$^٢(\theta' -$ جا $\theta°)$

$= \frac{1}{2} \times ١٤٤(\frac{٥}{٣} -$ جا $٩٥°\ ٣٠')$

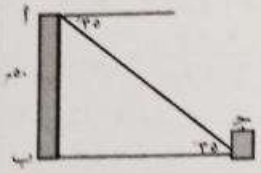
$\simeq ٤٨$ سم^٢

(٤) (أ) بفرض أن :

جـ القارب

المطلوب :

طول $\overline{أجـ}$



$\because$ جا $٣٥° = \frac{٥٠}{\text{أجـ}}$

$\therefore$ أجـ $= \frac{٥٠}{\text{جا}٣٥°} \simeq ٨٧$ م

(ب) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يعنى أنه يقع

فى الربع الأول :

س	٠	٨
ص	٨	٠

ل$_١$: س $+$ ص $= ٨$ ،

ل$_٢$: ص $= ٣$

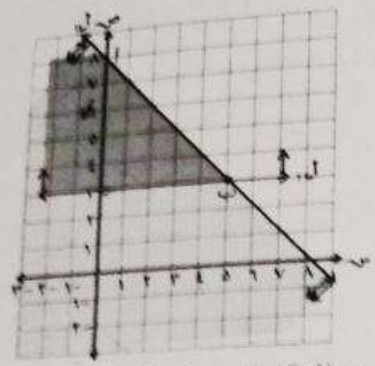
مستقيم يوازى محور السينات .

ملحوظة : ٠ $+ ٠ \geq ٨$

$\therefore$ (٠ ، ٠) $\ni$ الحل للمستقيم ل$_١$

٠ $\not< ٣$

$\therefore$ (٠ ، ٠) $\not\in$ الحل للمستقيم ل$_٢$



من الشكل الجزء المظلل الحل للمتباينات

هو Δ أ ب جـ ، حيث أ $= (٨ ، ٠)$

، ب $= (٣ ، ٥)$ ، جـ $= (٣ ، ٠)$

$\because$ م $= ٣$س $+ ٢$ص

$\therefore$ م$_{أ} = ٣ \times ٨ + ٢ \times ٠ = ٢٤$

، م$_{ب} = ٣ \times ٣ + ٢ \times ٥ = ٢١$ عظمى

، م$_{جـ} = ٣ \times ٣ + ٢ \times ٠ = ٦$

قيمة الدالة أكبر ما يمكن عند ب $= (٣ ، ٥)$

سلسلة

المرشد

شرح مراجعة نهائية

سلسلة المرشد لجميع صفوف الشهادة الإعدادية الأزهرية

حلول امتحانات الهندسة التحليلية

(١) امتحان منطقة القاهرة ١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

(١) (أ) $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٣) - (٢ ، ٤) = (٢ ، -١)$

$\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{ب} = (١ ، ٧) - (٤ ، ٣) = (-٣ ، ٤)$

$\overrightarrow{ج أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ج} = (٢ ، ٤) - (١ ، ٧) = (١ ، -٣)$

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{ج أ} = (٢ ، -١) + (-٣ ، ٤) + (١ ، -٣) = (٠ ، ٠) = \overrightarrow{٠}$

(ب) $\overrightarrow{أ ب} = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

$\overrightarrow{ب ج} = \sqrt{(-٣)^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

$\overrightarrow{ج أ} = \sqrt{١^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

(ج) $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ج} = ٢ \times -٣ + -١ \times ٤ = -١٠$

$\overrightarrow{ب ج} \cdot \overrightarrow{ج أ} = -٣ \times ١ + ٤ \times -٣ = -١٥$

$\overrightarrow{ج أ} \cdot \overrightarrow{أ ب} = ١ \times ٢ + -٣ \times -١ = ٥$

(د) $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ج} = -١٠ = -\sqrt{٥} \times ٥ = -\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب ج}$

$\therefore$ الزاوية $ب$ منفرجة

(٢) (أ) $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{ب} = (٤ ، ٣) - (٢ ، ٤) = (٢ ، -١)$

$\overrightarrow{ب ج}$ // $\overrightarrow{أ ٤}$ $\therefore$ متوازي أضلاع

$\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{٤}$

$\overrightarrow{٤} = \overrightarrow{ج} + \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

$\overrightarrow{٤} = (٤ ، ٤) + (٢ ، -١) - (١ ، ٧)$

$= (٥ ، -٤)$

(ب) بحل المعادلتين :

$س - ٤ص = -١٤$ ، $٤س + ص = -٥$

$\therefore س = -٢$ ، $ص = ٣$

$\therefore$ النقطة $(-٢ ، ٣)$ نقطة تقاطعهما

$\therefore م_١ = \frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص} = \frac{-١}{-٤} = \frac{١}{٤}$

وميل المعادلة للمستقيم الثاني

$م_٢ = \frac{-٤}{١} = -٤$

$\because م_١ \times م_٢ = -١$ $\therefore$ المستقيم متعامدان

معادلة المستقيم المارة بالنقطتين

$(-٢ ، ٣)$ ، $(٣ ، ٢)$

الميل $= \frac{٢ - ٣}{٣ - -٢} = \frac{١}{-٥}$

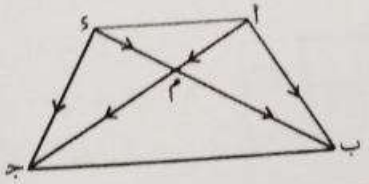
معادلة المستقيم المطلوب

$\frac{ص - ٢}{س - ٣} = \frac{١}{-٥}$

$-٥ص + ١٠ = س - ٣$

$\therefore$ $\boxed{س + ٥ص - ١٣ = ٠}$

(جـ) بفرض أن $\overleftrightarrow{أ ج} \cap \overleftrightarrow{ب ٤} = \{م\}$



(٢) $\overrightarrow{أ ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٤) - (٢ ، ٠) = (٢ ، ٤)$

$\overrightarrow{ب ٤} = \overrightarrow{٤} - \overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥) - (٤ ، ٣) = (-٤ ، ٢)$

$\overrightarrow{أ ج} \cdot \overrightarrow{ب ٤} = ٢ \times -٤ + ٤ \times ٢ = ٠$

$\therefore \overrightarrow{أ ج} \perp \overrightarrow{ب ٤}$

$\therefore$ الشكل $أ ب ج ٤$ معين

$\overrightarrow{م} = \frac{\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ج}}{٢} = \frac{\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{٤}}{٢}$

$\overrightarrow{م} = \frac{(٢ ، ٠) + (٤ ، ٤)}{٢} = \frac{(٤ ، ٣) + (٠ ، ٥)}{٢}$

$\overrightarrow{م} = (٣ ، ٢) = (٢ ، ٢)$

$\therefore$ المنحنى أعلى المحور القطبي هو $(٤ ، \frac{\pi}{٣})$

(٣) طول العمود $= \frac{|٤ \times ٢ - ١٣ + ج|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٣$

$\frac{|ج + ٥|}{٥} = ٣$ $\therefore |ج + ٥| = ١٥$

$ج + ٥ = ١٥$ $\therefore ج = ١٥ - ٥ = ١٥$

$ج + ٥ = -١٥$ $\therefore ج = -١٥ - ٥ = -٢٠$

$\therefore$ قيمة $ج$ هي $\{-٢٠ ، ١٠\}$

(٣)

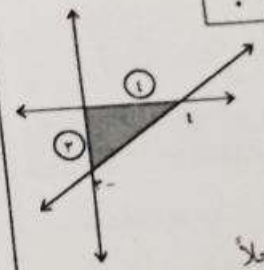
$س = \frac{٣ \times ١ + ٥ \times -٤}{٣ + ١} = \frac{-١١}{٤}$

$ص = \frac{٣ \times -٣ + ١ \times ٤}{٣ + ١} = \frac{-٥}{٤}$

$\therefore جـ = (\frac{-١١}{٤} ، \frac{-٥}{٤})$

(٤) $٣س - ٤ص = ١٢$

س	٠	٤
ص	-٣	٠



مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢$

$= ٦$ وحدة مربعة

(٥) الرسم ليس حلاً

في $\triangle أ ب ج$:

$\overrightarrow{أ م} + \overrightarrow{م ب} = \overrightarrow{أ ب}$ ..... (١)

في $\triangle ٤ م ج$:

$\overrightarrow{٤ م} + \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{٤ ج}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{٤ ج}$

$= (\overrightarrow{أ م} + \overrightarrow{م ج}) + (\overrightarrow{٤ م} + \overrightarrow{م ب})$

$= \overrightarrow{أ ج} + \overrightarrow{٤ ب}$

(٢) (أ)

(١) $\overrightarrow{ق_١} = ٦ حتا \frac{\pi ٢}{٣} \overrightarrow{س} + ٦ حتا \frac{\pi ٢}{٣} \overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ق_١} = -٣ \overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ق_٢} = ٦ حتا \frac{\pi ٤}{٣} \overrightarrow{س} + ٦ حتا \frac{\pi ٤}{٣} \overrightarrow{ص}$

$= -٣ \overrightarrow{س} - ٣\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$

$\because$ مقدار محصلة هذه القوى

$= \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$

$= -٣ \overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٣} \overrightarrow{ص} - ٣ \overrightarrow{س}$

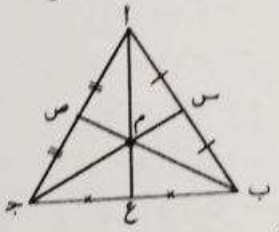
$- ٣\sqrt{٣} \overrightarrow{ص} + ٩ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ح} = ٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \|\overrightarrow{ح}\| = ٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ وحدة قوة

(٢)



في $\triangle أ ب ج$:

$\overrightarrow{م ع}$ متوسط في المثلث $أ ب ج$

$\therefore ٢ \overrightarrow{م ع} = \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م ج}$ ..... (١)

$\because \overrightarrow{م ص} = \frac{١}{٢} \overrightarrow{ب م}$ $\because \overrightarrow{م س} = \frac{١}{٢} \overrightarrow{ج م}$

المطلوب : $\overrightarrow{م س} + \overrightarrow{م ص} + \overrightarrow{م ع}$

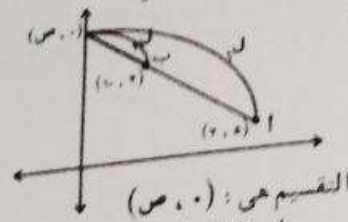
$= \frac{١}{٢} \overrightarrow{ج م} + \frac{١}{٢} \overrightarrow{ب م} + \overrightarrow{م ع}$

$= -\frac{١}{٢} (\overrightarrow{م ج} + \overrightarrow{م ب}) + \overrightarrow{م ع}$ من (١)

$= -\frac{١}{٢} (٢ \overrightarrow{م ع}) + \overrightarrow{م ع}$

$= -\overrightarrow{م ع} + \overrightarrow{م ع} =$ صفر

(٣)



نقطة التقسيم هي : $(٠ ، ص)$

$\therefore$ صفر $= \frac{ل_١ \times ٢ + ل_٢ \times ٥}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore ٢ ل_١ + ل_٢ \times ٥ = ٠ \Leftarrow ٢ ل_١ = -٥ ل_٢$

$\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{-٥}{٢} < ٠$

$\therefore$ التقسيم من الخارج بنسبة ٥ : ٢ كما بالرسم

(٤) $م_١ = -٢ - ٣\sqrt{٧}$ ، $م_٢ = ٢ + ٣\sqrt{٧}$

$\because م_١ م_٢ = ٤ - ٣ = ١$

$م_١ - م_٢ = -٢ - ٣\sqrt{٧} - ٢ + ٣\sqrt{٧} = -٤$

$\because$ طا $\theta = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right|$ حيث (θ) الحادة

$\therefore$ طا $\theta = \left|\frac{-٤}{١ + ١}\right| = |-٢|$

$\therefore$ ق$(\theta) = ٦٠°$

$\therefore$ قياس الزاوية المنفرجة $= ١٨٠° - ٦٠°$

$= ١٢٠°$

(٥) $م_١ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

المعادلة الثانية : $٢س - ٣ص = ١٨$

(بالضرب × ٦) ، $\therefore م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$\because ل_١$ // $ل_٢$ $\therefore م_١ = م_٢$

$\therefore \frac{١}{٣} = \frac{٢}{أ}$ $\therefore$ $\boxed{أ = ٢}$

(ب) ميل المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$ ويمر بالنقطة (٣، -٥)

∴ المعادلة $\frac{ص + ٥}{س - ٣} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ٢ص + ١٠ = -٣س + ٩

⇐ ٢ص + ٣س + ١ = ٠

(جـ) طول العمود المرسوم من مركز الدائرة نقطة الأصل إلى المستقيم الأول = ٢

طول العمود المرسوم من مركز الدائرة نقطة الأصل إلى المستقيم الثانى = ٢

∵ الإبعاد متساوية .

∴ الأوتار متساوية فى الطول .

(٢) امتحان منطقة القليوبية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) أولاً : (١) الميل = ظا ٤٥ = ١

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١، ١)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم

$\overrightarrow{م} = (٣، -١) + ك(١، ١)$

ثانيًا : طول العمود

$= \frac{|٧ - ٢ \times ١٢ - ١ \times ٥|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}} = \frac{٢٦}{١٣}$

= ٢ وحدة طول

(٢) أولاً : (س، ص) (٦، ٢) (٧، ٥)

∵ $\frac{س + ٣}{٢} = ٢$ ⇐ س + ٣ = ٤

∴ س = ١

∴ $\frac{ص + ٧}{٢} = ٦$ ⇐ ص + ٧ = ١٢

∴ ص = ٥ ، ∴ أ = (١، ٥)

ثانيًا : ∵ $م_{١} \times م_{٢} = -١$

∴ $\frac{ك}{٣} \times \frac{٢}{-٤} = -١$ ، ك = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

(٣) $م_{١} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $م_{٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ $م_{٢} - م_{١} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{٨}{٩} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢}{٣} = م_{١} م_{٢}$

∵ ظا هـ = $\left|\frac{م_{٢} - م_{١}}{١ - م_{١} م_{٢}}\right| = \left|\frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٨}{٩} + ١}\right|$

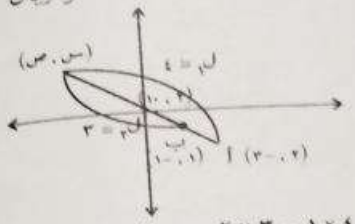
$= \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{١٧}{٩}} = \frac{٦}{١٧}$

∴ ق(هـ) = ظا$^{-١}$($\frac{٦}{١٧}$) = ١٩° ٢٦′

(٤) $م_{١} = \frac{-٢}{١} = -٢$ ، $م_{٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

∵ $م_{١} = م_{٢}$ ∴ المستقيمان متوازيان

(٥)



س = $\frac{٤ \times ١ - ٣ \times ٢}{٤ - ٣} = \frac{-٢}{١} = -٢$

ص = $\frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٣}{٤ - ٣} = \frac{-٤ + ٩}{١} = ٥$

∴ نقطة التقسيم = (-٢، ٥)

(٢) (أ) (١) أولاً : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٣، ك) - (٧، ٢) = (-٤، ك - ٢)

∵ $\|\overrightarrow{أب}\| = ٥ = \sqrt{١٦ + (ك - ٢)^{٢}}$

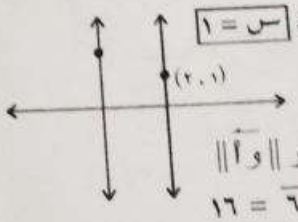
∴ ٢٥ = ١٦ + ك^{٢} + ٤ - ٤ك

∴ ك^{٢} - ٤ك - ٥ = ٠

(ك - ٥)(ك + ١) = ٠

∴ ك = ٥ ، ك = -١

ثانيًا : المعادلة س = ١



(٢) أولاً : معيار $\|\overrightarrow{و}\|$

= $\sqrt{٦٤ + ٣ \times ٦٤}$ = ١٦

ظا θ = $\frac{٨}{٣\sqrt{٨}} = \frac{١}{٣\sqrt{}}$

∴ ق(θ) = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$

∴ الصورة القطبية = $(١٦، \frac{\pi}{٦})$

ثانيًا : بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} = ١$ الجزآن هما ٣، ٤

(٣) بحل المعادلتين :

س + ص = ٥ ، ٢س + ص = ٨

∴ س = ٣ ، ص = ٢

نقطة التقاطع = (٣، ٢)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢) ، (١، ٢)

الميل = $\frac{٢ - ٢}{٣ - ١} = ١$

∴ معادلة المستقيم : $\frac{ص - ١}{س - ٢} = ١$

ص - ١ = س - ٢

∴ ص - س + ١ = ٠

(٤) مساحة المضلع المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ هـ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{هـ}$

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم

= $\frac{١}{٤} \times ٥ \times (١٦)^{٢}$ ظتا $\frac{\pi}{٥}$

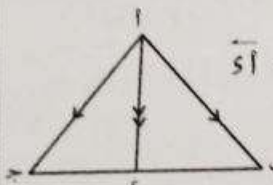
= $\frac{١}{٤} \times ٥ \times (١٦)^{٢} \times \frac{١}{\text{ظا}٣٦}$

= ٤٤٠,٤٤ سم^{٢}

(٥) فى Δ أ ب ء :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$ بالضرب × ٢

$٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} = ٢\overrightarrow{أ ء}$ ..... (١)



فى Δ أ ء جـ

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$

بالضرب × ٣

$٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٣\overrightarrow{أ ء}$ ..... (٢)

بجمع (١)، (٢) $٥\overrightarrow{أ ء} = ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} + ٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء}$

∵ $٢\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{جـ ء} = -٣\overrightarrow{جـ ء}$

∴ $٥\overrightarrow{أ ء} = ٣\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{أب}$

$+ ٣\overrightarrow{جـ ء} - ٣\overrightarrow{جـ ء}$

∴ $٥\overrightarrow{أ ء} = ٣\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{أب}$

(٣) امتحان منطقة المنوفية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\overline{م_{١}م_{٢}} \perp \overline{هـ}$ ∴ $م_{١} م_{٢} = -١$

∴ $\frac{٢}{٣} \times \frac{ك}{٢} = -١$ ∴ ك = -٣

(٢) $\|\overline{أ}\| = \sqrt{٣ \times ٤ + ٤^{٢}} = ٤$

ظا θ = $\frac{٣\sqrt{٢-}}{٢} = -٣\sqrt{}$

∴ θ = ظا$^{-١}$(-$٣\sqrt{}$) = ٣٠٠° = $\frac{٥}{٣}\pi$

∴ الصورة القطبية = $(٤، \frac{٥}{٣}\pi)$

(٣) $م_{١} = \frac{-٣}{-١} = ٣$ ، $م_{٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

∵ ظا هـ = $\left|\frac{م_{٢} - م_{١}}{١ + م_{١} م_{٢}}\right|$

= $\left|\frac{-٢ - ٣}{١ - ٦}\right| = \left|\frac{-٥}{-٥}\right| = ١$

∴ ق(هـ) = ٤٥°

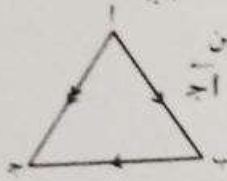
(٤) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$

بإضافة $\overrightarrow{أ ء}$ للطرفين

∴ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{أ ء}$

= $٢\overrightarrow{أ ء}$

∴ الناتج $٢\overrightarrow{أ ء}$



(ب) ∵ $٢\overrightarrow{ل} + ٥(\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ب})$

$= ٢(\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}) - ٣(\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ص})$

∴ $٢\overrightarrow{ل} + ٥\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ب}$

$= ٢\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع} - ٣\overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ص}$

∴ $٢\overrightarrow{ل} = ٥\overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{ع}$

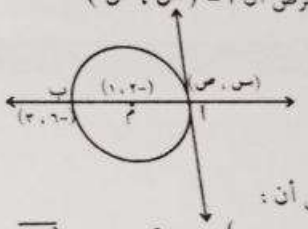
$٢\overrightarrow{ل} = ٢\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ع م} - \overrightarrow{ع ن}$

$\overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن م}$ وهو المطلوب .

(ج) نقطة "م" تقع فى منتصف $\overline{أ ب}$

ويفرض أن أ = (س ، ص)



ويفرض أن :

أ = (س ، ص) حيث م منتصف $\overline{أ ب}$

$\therefore \frac{س - ٦}{٢} = -٢$

$\therefore$ س - ٦ = -٤ $\therefore$ **س = ٢**

$\frac{ص + ٣}{٢} = ١$ $\therefore$ ص + ٣ = ٢

$\therefore$ **ص = -١**

$\therefore$ نقطة أ = (٢ ، -١)

المماس عمودى على القطر $\overline{أ ب}$

$\because$ ميل المستقيم $\overline{أ ب} = \frac{٣ + ١}{-٦ - ٢}$

$= \frac{٤}{-٨} = \frac{-١}{٢}$

$\overline{أ ب}$ ، المماس عند أ متعامدان

$\therefore$ م$_{١}$ م$_{٢}$ = -١

$\therefore$ ميل المماس عند أ = ٢

ويمر بالنقطة (٢ ، -١) : $\frac{ص + ١}{س - ٢} = ٢$

$\therefore$ ص + ١ = ٢س - ٤

ص - ٢س + ٥ = ٠

(٢) (أ) (١) $\because \| ٣ \overrightarrow{ك أ} \| = \| -١٥ \overrightarrow{أ} \|$

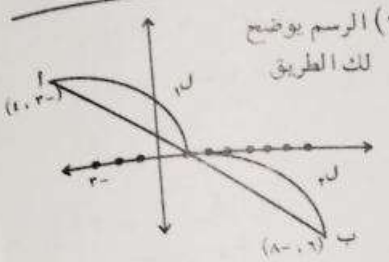
$\therefore |٣ ك| \| \overrightarrow{أ} \| = ١٥ \| \overrightarrow{أ} \|$

$\therefore |٣ ك| = ١٥$

$٣ ك = ١٥$ أو $٣ ك = -١٥$

$\therefore ك = ٥$ | $\therefore ك = -٥$

(٢) الرسم يوضح
لك الطريق



النقطة التى تقع على محور السينات هى (س ، ٠)

$\because ص = \frac{ل_{١} ص_{٢} + ل_{٢} ص_{١}}{ل_{١} + ل_{٢}}$

$\therefore$ صفر $= \frac{ل_{١} \times -٨ + ل_{١} \times ٤}{ل_{١} + ل_{٢}}$

$\therefore -٨ ل_{١} + ٤ ل_{٢} = ٠$

$\therefore ٨ ل_{١} = ٤ ل_{٢}$

$\therefore \frac{ل_{١}}{ل_{٢}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} < ٠$

$\therefore$ التقسيم من الداخل كما هو واضح من الرسم والنسبة ١ : ٢

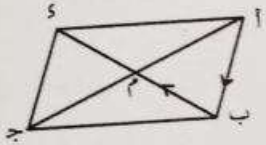
(٣) طول العمود

$= \frac{|٣ \times ٩ + ٤ \times -٥ - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٣٥}{٥} = ٧$ وحدة طول

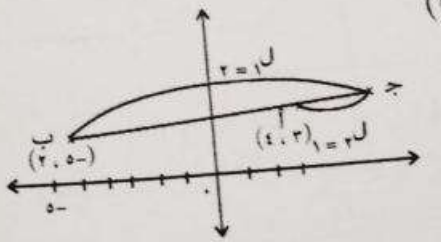
(٤) من الرسم "م" نقطة تلاقى القطرين

$\therefore ٢ \overrightarrow{ب م} = \overrightarrow{ب ء}$



$\therefore \overrightarrow{أ ب} + ٢ \overrightarrow{ب م} = \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$

(ب)



$\because \frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{٢}{١} \Leftarrow \frac{ب جـ}{أ ب} = \frac{٢}{١}$

أيضًا : بفرض أن جـ = (س ، ص)

$\therefore$ س $= \frac{ل_{١} س_{١} - ل_{٢} س_{٢}}{ل_{١} - ل_{٢}}$

$= \frac{٢ \times ١ - ٣ \times ٢ - ٥}{١ - ٢} = \frac{٥ + ٦}{١ - ٢} = ١١$

ص $= \frac{ل_{١} ص_{١} - ل_{٢} ص_{٢}}{ل_{١} - ل_{٢}} = \frac{٢ \times ١ - ٤ \times ٢}{١ - ٢}$

$= \frac{٨ - ٢}{١} = ٦$

$\therefore$ نقطة جـ = (١١ ، ٦)

(جـ) معادلة المستقيم :

(٢س + ص - ٥)

+ ك(٣س - ٢ص - ٤)

$\because$ يمر بالنقطة (٥ ، ٢)

$\therefore$ تحقق المستقيم .

$\therefore$ (٢ × ٥ + ٢ - ٥)

+ ك(٣ × ٥ - ٢ × ٢ - ٤) = ٠

$\therefore$ ٧ + ٧ ك = ٠ $\therefore$ ك = -١

$\therefore$ المعادلة هى :

(٢س + ص - ٥) - (٣س - ٢ص - ٤) = ٠

$\therefore$ -س + ٣ص - ١ = ٠

$\therefore$ **٣ص - س - ١ = ٠**

ملحوظة : يوجد طريقة أخرى للحل

(٤) امتحان منطقة الشرقية ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٣ ، -١) - (٣ ، ٦)$

$= (-٣ ، -٤)$

(٢) شرط التعامد م$_{١}$ م$_{٢}$ = -١

$\therefore \frac{٢}{٣} \times \frac{ك}{٢} = -١$ $\therefore$ **ك = -٣**

(٣) $\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{٤ \times ٣ + ٤^{٢}} = ٤$

$\therefore$ طا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\sqrt{٣} =$

$\therefore$ ق(هـ) = ٦٠°

$\therefore \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٦٠°)$

(٤) $\because \overrightarrow{ر} = (٥ ، صفر) + ك(٤ ، ٣)$

(س ، ص) = (٥ ، ٠) + ك(٤ ، ٣)

س = ٥ + ٤ك ، ص = ٣ك

$\frac{س - ٥}{٤} = \frac{ص}{٣} \Leftarrow ٣س - ١٥ = ٤ص$

$\therefore$ ٣س - ٤ص - ١٥ = ٠

طول العمود $= \frac{|٣ \times ٠ - ٤ \times ٠ - ١٥|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{١٥}{٥} = ٣$ وحدة طول

(ب) ميل الأول $= \frac{-٢}{١} = -٢$

ميل الثانى $= \frac{-٢}{١} = -٢$

$\because$ الميلان متساويان

$\therefore$ المستقيمان متوازيان بفرض س = ٠

فى المعادلة الأولى

$\therefore$ ص = ٤ $\therefore$ النقطة (٠ ، ٤)

البُعد بين المستقيمان هو البعد بين النقطة (٠ ، ٤)

والمستقيم ٢س + ص + ٣ = ٠

طول العمود $= \frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٣|}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{٧}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

(جـ) المعادلة الاتجاهية هى :

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، -١) + ك(-٥ ، ٣)$

ومنها نوجد المعادلتان الوسيطيتان أو البارامترية

وهما : س = ٣ - ٥ك

ص = -١ + ٣ك :

$\therefore \frac{س - ٣}{-٥} = ك$ ، $\frac{ص + ١}{٣} = ك$

∴ المعادلة العامة أو الكارتيزية هي :

$\frac{س - ٣}{٣-} = \frac{ص + ١}{٥}$

٥س − ١٥ = −٣ص − ٣

٥س + ٣ص − ١٢ = ٠

(٢) (أ) (١) $٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

$= ٢(٢ ، ٣) - (٣ ، -٢)$

$= (٤ ، ٦) - (٣ ، -٢)$

$= (١ ، ٨)$

(٢) النقطة هي (٢ ، ٥)

ونقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{٥ - ٠}{٠ - ٢}$ ، $ص = \frac{٥}{٢}س$

(٣) $٣\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$

$= ٣(٢ ، ٤) + ٢(١ ، -٢)$

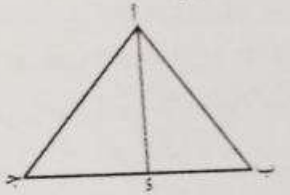
$= (١٢ ، ٦) + (٢ ، -٤)$

$= (١٤ ، ٢)$

∴ $\|٣\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٩٦ + ٤}$

∴ المعيار $= \sqrt{٢٠٠} = ١٠\sqrt{٢}$

(٤) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = ٢\overrightarrow{أء}$



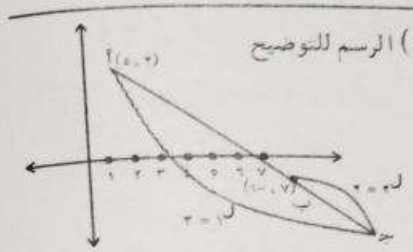
(ب) $م_١$ = ميل المستقيم الأول $= \frac{-١}{٥}$

$م_٢ = \frac{١}{٤}$

∴ ظا $\theta = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٤} - \frac{-١}{٥}}{\frac{١}{٢٠} - ١}\right|$

$= \frac{\frac{٩}{٢٠}}{\frac{١٩}{٢٠}} = \frac{٩}{١٩}$ ∴ $\theta = ٢٥° ٢٠' ٤٦''$

(ج) الرسم للتوضيح



النقسيم من الخارج

∴ $س = \frac{ل_١ س_٢ - ل_٢ س_١}{ل_١ - ل_٢}$

$= \frac{٣ \times ٢ - ٧ \times ٢}{٢ - ٣} = ١٧$

$ص = \frac{٣ \times -١ - ٥ \times ٢}{٢ - ٣} = \frac{-١٠ - ٣-}{١} = -١٣$

النقطة = (١٧ ، -١٣)

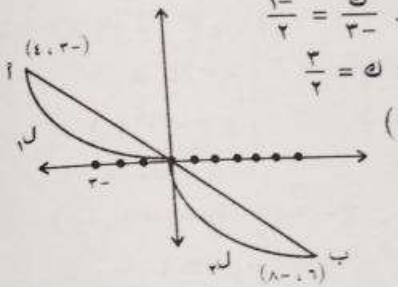
(٥) امتحان منطقة البحيرة ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

(أ) (١) شرط التوازي $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{ك}{٣-} = \frac{-١}{٢}$

∴ $ك = \frac{٣}{٢}$

(٢)



النقطة التي تقع على محور السينات هي (س ، ٠)

∴ $ص = \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

صفر $= \frac{ل_١ \times -٨ + ل_٢ \times ٤}{ل_١ + ل_٢}$

∴ ٨ل١ = ٤ل٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \left[\frac{١}{٢}\right] < ١$ ∴ النسبة ١ : ٢

(٣) ٤ك $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣\|\overrightarrow{أ}\|$

∴ ٤ك = ٣ ∴ $ك = \frac{٣}{٤}$

(٤) $م_١$ = ميل الأول $= \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$م_٢ = \frac{-٣}{ب}$ وبشرط التعامد

$م_١ \times م_٢ = -١$ ، ∴ $\frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{ب} = -١$

ب = ٢

(ب) طول العمود $= \frac{|٥ \times ١ - ١٢ \times ٢ - ١٧|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

$= \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ وحدة طول

(جـ) بحل المعادلتين ٣س + ٢ص = ٧

٢س − ٣ص = −٤

∴ س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيمين هما (١ ، ٢)

والنقطة (٣ ، ٤)

∴ الميل $= \frac{٤ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

∴ المعادلة المتجهة = أي نقطة + ك(١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ٤) + ك(١ ، ١)$

أو $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢) + ك(١ ، ١)$

(٢) (أ) (١) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ بالضرب × ٦

٣س + ٢ص = ٦

(٢) ∵ ظا θ = الميل للمستقيم

∴ $م = ٠,٧٥$

∵ $م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{٤}$

∴ $\frac{أ}{٤} = ٠,٧٥$ ∴ أ = ٣

(٣) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٦٤ + ٣ \times ٦٤} = \sqrt{٢٥٦} = ١٦$

ظا $\theta = \frac{٨}{٣\sqrt{٨}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\theta(\hat{ق}) = ٣٠°$

الصورة القطبية = (١٦ ، ٣٠°)

$= (١٦ ، \frac{\pi}{٦})$

(٤) $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

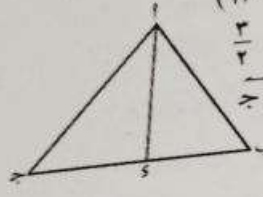
$= ٢(٦ ، -٢) - ٣(٣ ، ٤)$

$= (١٢ ، -٤) + (-١٢ ، -٩)$

$= (٠ ، -١٣)$

(ب) ∵ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٣}{٢}$

$٢\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{ء جـ}$



في Δ أ ب ء

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أء}$ بالضرب ×٢

∴ $٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} = ٢\overrightarrow{أء}$ ..... (١)

في Δ أ ء جـ :

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أء}$ بالضرب × ٣

∴ $٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٣\overrightarrow{أء}$ ..... (٢)

بالجمع (١) ، (٢)

$٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} + ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٥\overrightarrow{أء}$

..... (٣)

∵ $٢\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{ء جـ} = -٣\overrightarrow{جـ ء}$

∴ (٣) تصبح بعد وضع $٢\overrightarrow{ب ء} = -٣\overrightarrow{جـ ء}$

$٢\overrightarrow{أب} - ٣\overrightarrow{جـ ء} + ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٥\overrightarrow{أء}$

∴ $٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ} = ٥\overrightarrow{أء}$

(جـ) ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢}$

∵ المستقيم المطلوب يوازي المعطى

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم ⇐ $\frac{ص + ٥}{س - ٣} = \frac{-١}{٢}$

٢ص + ١٠ = −س + ٣

٢ص + س + ٧ = ٠

(٦) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) من رسمها نجد أن :

البعد = ٥ وحدات طول

(ب) ∵ $\overleftrightarrow{أ}$ // $\overleftrightarrow{ب}$

∴ $\frac{س_٢}{ص_٢} = \frac{س_١}{ص_١} \Leftarrow \frac{٨}{ك} = \frac{-٤}{-٣}$

∴ $-٤ك = -٢٤$ ∴ **ك = ٦**

(جـ) المعادلة الكارتيزية ص = ٥

(د) نقطة تلاقي المتوسطات =

$\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$

$= \left(\frac{٥+٢+٨}{٣} ، \frac{-٣+٣+٠}{٣}\right) = (٥ ، ٠)$

(٢) (أ) $س = \frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$

(١، ٣) $ل_١ = ٢$ $ل_٢ = ٣$ (-٢، -٥)

أ (س، ص) ب (س٢، ص٢)

$= \frac{٣ \times ٢ + ٢ \times -٢}{٣ + ٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

$ص = \frac{٣ \times ١ + ٢ \times ٥}{٣ + ٢} = \frac{١٣}{٥}$

∴ النقطة $(١ ، \frac{١٣}{٥})$

(ب) ∵ $م = \frac{١}{٣}$ ، $ى = (١ ، ٣)$ ،

والنقطة (٢ ، -١)

∴ المعادلة المتجهة

$ر = (٢ ، -١) + ك (١ ، ٣)$

(٣) (أ)

(-٢، ٢) أ — د

ب (٧، ١) — جـ (٤، ٤)

∵ $\overleftrightarrow{أب} = \overleftrightarrow{دجـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{ب} - \overleftrightarrow{أ} = \overleftrightarrow{جـ} - \overleftrightarrow{د}$

$\overleftrightarrow{د} = \overleftrightarrow{جـ} + \overleftrightarrow{أ} - \overleftrightarrow{ب}$

$= (٤ ، ٤) + (٢ ، -٢) - (٧ ، ١)$

$= (-١ ، ٢)$

(ب) ∵ ٤ص = ٣س - ١١

∴ $ص = \frac{٣}{٤}س - \frac{١١}{٤}$

∴ $م_١ = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = -\frac{١}{٧}$

∵ $ظا هـ = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right| = \left|\frac{-\frac{١}{٧} - \frac{٣}{٤}}{١ + -\frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}}\right|$

∴ $ظا هـ = \frac{\frac{٢٥}{٢٨}}{\frac{٢٥}{٢٨}} = ١$ ∴ $هـ(\widehat{ح}) = ٤٥°$

(٤) (أ) ∵ $٧س + ص = -٣$ ⟵ (١)

$٥س - ص = ٣$ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) بجلهما

∴ س = ٠ ، ص = -٣

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (٠ ، -٣)

، ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١ + ٣}{٠ - ٢}$

$= \frac{٢}{٢} = ١$

∴ معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

∴ $\frac{ص + ١}{س - ٢} = ١$ ∴ ص + ١ = س - ٢

∴ **ص = س - ٣**

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطتين

∵ $م = \frac{٣ + ٠}{٠ - ٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم : $\frac{ص + ٣}{س - ٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ص + ١٢ = ٣س

∴ ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠

[معادلة المستقيم المطلوب]

طول العمود = $\frac{|٣ \times ٥ - ٤ \times ٢ - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{٥}{٥}$ = وحدة طول

(٧) امتحان منطقة القليوبية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد

هو $م_١ \times م_٢ = -١$ ∴ $\frac{-أ}{٣} \times \frac{٣}{٢} = -١$

∴ **أ = ٢**

(ب) المعادلة هي :

$ر = (٢ ، -٣) + ك (٤ ، ٣)$

(جـ) ∵ $٢\overleftrightarrow{أ} - ٣\overleftrightarrow{ب}$

$= ٢(٦ ، -٢) - ٣(٤ ، ٣)$

$= (٠ ، -١٣)$

∵ $\|٢\overleftrightarrow{أ} - ٣\overleftrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٦٩ + ٠} = ١٣$

(د) $م_١ = -\frac{١}{٣}$ ، $م_٢ = ٢$

$ظا هـ = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right|$

$= \left|\frac{٢ - -\frac{١}{٣}}{١ + ٢ \times -\frac{١}{٣}}\right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{\frac{١}{٣}}$

ظا هـ = ٧ ∴ $هـ(\widehat{ح}) = ٨١° ٥٢'$

(٢) (أ) طول العمود = $\frac{|٥ \times ١ - ١٢ \times ٢ - ٧|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

$= \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ وحدة طول

(ب)

ل١ = ٢ ل٢ = ٣

أ (٢، -١) — ب (-٤، ٣)

$س = \frac{٢ \times ٣ + ٢ \times -٣}{٣ + ٢} = -١$

$ص = \frac{٢ \times -١ + ٤ \times ٣}{٣ + ٢} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

∴ النقطة (-١ ، ٢)

(٣) (أ) المميل = ظا ٤٥ = ١

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

المعادلة الإتجاهية

$ر = (-٤ ، ٣) + ك(١ ، ١)$

المعادلة البارامترية هما

$س = ٣ + ك$ ، $ص = -٤ + ك$

(ب) (٤، ٣)

د — أ

جـ (٢، -٢) — ب (١، -٥)

$\overleftrightarrow{د} = \overleftrightarrow{أ} + \overleftrightarrow{جـ} - \overleftrightarrow{ب}$

$= (٤ ، ٣) + (٢ ، -٢) - (١ ، -٥)$

$= (٣ ، ٠)$

(٤) (أ) ∵ $ل_١$ تصبح :

$س = -١ + ٢ك$ ، $ص = ٣ - ك$

∴ $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٣}{-١}$

∴ $س + ١ = -٢ص + ٦$

∴ المعادلة الإحداثية :

$س + ٢ص - ٥ = ٠$ ⟵ (١)

ويحلها مع المعادلة

$٢س - ٣ص + ٤ = ٠$ ⟵ (٢)

نجد س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم (١ ، ٢)

∴ ميل المستقيم المطلوب

$= \frac{٢ - ٤}{١ - ٢ -} = \frac{٢}{-٣}$

معادلة المستقيم المطلوب

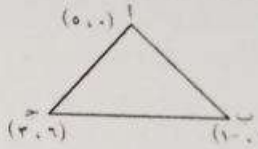
$(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

$(ص - ٤) = -\frac{٢}{٣}(س + ٢)$

∴ $٣ص - ١٢ = -٢س - ٤$

∴ المعادلة هي : **٣ص + ٢س - ٨ = ٠**

(ب)



$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢، -٦)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$

$\therefore \overrightarrow{أجـ} = (٦، ٣) - (٠، ٥)$

$= (٦، -٢)$

$\therefore \|\overrightarrow{أجـ}\| = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$

$\because \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

$= (٦، ٣) - (٢، -١)$

$= (٤، ٤)$

$\therefore \|\overrightarrow{بجـ}\| = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$

$\because أب = أجـ \quad \therefore \Delta$ متساوى الساقين

$\because$ ب جـ أصغر من أب

$\therefore$ الزاوية حادة

$\because$ ميل $\overrightarrow{أب} = \frac{-٦}{٢} = -\frac{٣}{١} = م_١$

، ميل $\overrightarrow{أجـ} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣} = م_٢$

طا هـ $= \left|\frac{\frac{١}{٣} + ٣}{١ + \frac{-٣}{١} \times \frac{١}{٣}}\right| = \frac{\frac{٧}{٣}}{\frac{٢}{١}} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore$ ق(هـ) = ق(أ) = ٢٤ ′ ٤٩ °

(٨) امتحان منطقة المنوفية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) شرط التعامد $م_١ \times م_٢ = ١$

$\therefore -١ = \frac{-أ}{٣} \times \frac{٣}{٢}$ $\quad \therefore$ **أ = ٢**

(ب) المستقيم $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أ = ٤ ، ب = -٣

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$ وحدة طول

(جـ) $\because$ س $= ١٢ \sqrt{٢}$ جتا $(\frac{\pi}{٤}) = ١٢$

ص $= ١٢ \sqrt{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤} = ١٢$

$\therefore \overrightarrow{م} = ١٢ \overrightarrow{س} + ١٢ \overrightarrow{ص}$

(ى) $\overrightarrow{ع_١ع_٢} = \overrightarrow{م_٢م} - \overrightarrow{م_١م}$

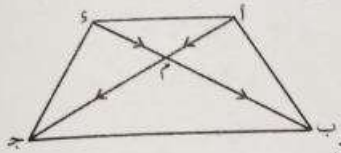
$= ١٢ \overrightarrow{ى} - -٨ \overrightarrow{ى} = ٢٠ \overrightarrow{ى}$

(٢) (أ) $\because \overrightarrow{بجـ} = ٣ \overrightarrow{أء}$

$\therefore \overrightarrow{بجـ} // \overrightarrow{أء}$ ، ب جـ $= ٣$ أ ء

$\therefore$ الشكل فيه ضلعان متوازيان وغير متساويين

$\therefore$ الشكل شبه المنحرف



بفرض أن

$\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$

فى Δ أ م ء

$\because \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مء} = \overrightarrow{أء}$ ⟵ (١)

فى Δ ب م جـ

$\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$(\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مجـ}) + (\overrightarrow{مء} + \overrightarrow{بم})$

$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ}$ ⟵ (٣)

$\because \overrightarrow{بجـ} = ٣ \overrightarrow{أء}$

$\therefore$ (٣) تصبح $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = ٤ \overrightarrow{أء}$

(ب) بفرض أن (ب) بين أ ، جـ

$\overrightarrow{م_١} = (٥، -٢)$ ، $\overrightarrow{م_٢} = (-١، ٤)$

$\overrightarrow{م} = ب = (١، ٢)$

$\because \overrightarrow{م} = \frac{ل_١ \overrightarrow{م_٢} + ل_٢ \overrightarrow{م_١}}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore (١، ٢) = \frac{ل_١(-١، ٤) + ل_٢(٥، -٢)}{ل_١ + ل_٢}$

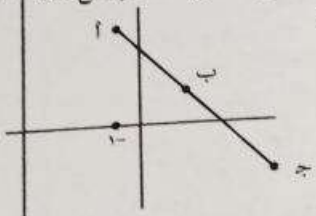
$\therefore ١ = \frac{٥ل_١ - ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$

$\therefore ل_١ + ل_٢ = ٥ل_١ - ل_٢$ ، $٤ل_١ = ٢ل_٢$

$٢ل_١ = ل_٢$ $\quad \therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} > ٠$

$\therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

ملحوظة هامة : حتى يتحقق الطالب من حله برسم المسألة



حيث :

أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ،

جـ = (٥ ، -٢)

واضح أن ب تقع على بين أ ، جـ بنسبة ١ : ٢

(٣) (أ) $\because \overrightarrow{ر} = (\frac{١}{٣}، ٠) + ك(-٣، ٤)$

$\therefore$ س $= -٣ك$ ، ص $= \frac{١}{٣} + ٤ك$

$\therefore \frac{س}{-٣} = \frac{\left(ص - \frac{١}{٣}\right)}{٤}$

$\therefore ٤س = -٣ص + ١$

$\therefore$ المعادلة $٤س + ٣ص - ١ = ٠$

طول العمود $= \frac{|٤ \times ٨ + ٣ \times -٢ - ١|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \frac{٢٥}{٥} = ٥$ وحدات طول

(ب) المستقيم المعطى ص $= \frac{٣}{٢}$ س

$\therefore$ ميل المستقيم المطلوب $= \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم (٢ ، ٣)

$\therefore$ الصورة الإتجاهية للمعادلة المطلوبة

$\overrightarrow{ر} = (٤، ٧) + ك(٢، ٣)$

، المعادلتان البارامتريتان :

س $= ٧ + ٢ك$ ، ص $= ٤ + ٣ك$

المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٧}{٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

$\therefore ٣س - ٢١ = ٢ص - ٨$

$\therefore$ المعادلة هى $\boxed{٣س - ٢ص - ١٣ = ٠}$

(٤) (أ) ميل المستقيم المار بالنقطتين

$م_١ = \frac{١ - -١}{٢ - ٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$

ميل المستقيم الثانى $= م_٢ = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ طا هـ $= \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٢} - -١}{١ + \frac{١}{٢} \times -١}\right|$

$= \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣$

$\therefore$ ق(هـ) $\simeq$ ٧١ ° ٣٤

(ب) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ}$

$= \frac{١}{٢}(٤، -٦) + (٦، -٩) - ٣(-٣، -٢)$

$= (٢، -٣) + (-٦، ٩) + (٩، ٦)$

$= (٥، ١٢)$

$\therefore \|\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٣\overrightarrow{جـ}\|$

$= \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = ١٣$

(٩) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$= (٣، -١) - (٣، ٦)$

$\overrightarrow{أب} = (-٣، -٤)$

$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

(ب) قياس الزاوية هى ٩٠°

(جـ) $\because \|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{٦٤ + ٦٤} = ٨\sqrt{٢}$

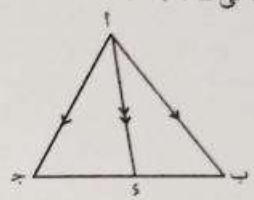
، طا $\theta = \frac{ص}{س} = ١$

$\therefore$ ق($\hat{\theta}$) $= ط^{-١}(١) = ٤٥°$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{٤}$ $\quad \therefore \overrightarrow{ق} = (٨\sqrt{٢}، \frac{\pi}{٤})$

(ء) ص = −٤

(٢) (أ) في Δ أ ب ء



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$ بالضرب × ٢

$٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} = ٢\overrightarrow{أ ء}$ ..... (١)

في Δ أ ء جـ

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$ بالضرب × ٣

$\therefore ٣\overrightarrow{أجـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٣\overrightarrow{أ ء}$ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{ب ء} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٥\overrightarrow{أ ء}$

..... (٣)

$\because ٢\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{جـ ء} = -٣\overrightarrow{جـ ء}$

$\therefore$ من (٣)

$٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ} - ٣\overrightarrow{جـ ء} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٥\overrightarrow{أ ء}$

$\therefore ٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أجـ} = ٥\overrightarrow{أ ء}$ [المطلوب]

(ب) $م_١ = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

$م_٢ = \frac{-٦}{-٨} = \frac{٣}{٤}$

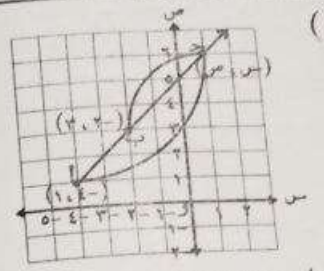
$\because م_١ = م_٢$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان.

بفرض نقطة على المستقيم الأول وليكن ص = ٠

$\therefore$ النقطة (٢ ، ٠) تقع على المستقيم الأول

البعد $= \frac{|٨ \times ٠ - ٦ \times ٢ - ١٣|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٢٥}{١٠} = ٢,٥$ وحدة طول

(٣) (أ)



$\because ل_١ : ل_٢ = ٥ : -٣$

$\frac{ل_١ \overrightarrow{ر_٢} + ل_٢ \overrightarrow{ر_١}}{ل_١ + ل_٢} = ر$

$= \frac{٥(-٢ ، ٣) - ٣(-٤ ، ١)}{٣ - ٥}$

$= \frac{(١٢ ، ٢)}{٢} = (٦ ، ١)$

(ب) المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين هي :

$س - ص + ٢ + ك(٢س + ص - ٨) = ٠$

ويمر بالنقطة (٣ ، ٤) $\therefore$ يحقق المعادلة

$\therefore ٣ - ٤ + ٢ + ك(٢ \times ٣ + ٤ - ٨) = ٠$

$١ + ٢ك = ٠$ $\therefore ك = -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ المعادلة هي : $س - ص + ٢ + (-\frac{١}{٢})$

$(٢س + ص - ٨) = ٠$ بالضرب ×٢

$\therefore ٢س - ٢ص + ٤ - ٢س - ص + ٨ = ٠$

$\therefore -٣ص + ١٢ = ٠$ $\therefore$ **ص = ٤**

(١٠) امتحان منطقة البحيرة ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

(١) (أ) $م_١ = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-أ}{-٣} = \frac{أ}{٣}$

$\because$ المستقيمان متعامدان

$م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore \frac{٣}{٢} \times \frac{أ}{٣} = -١$ $\therefore$ **أ = −٢**

(ب) $\overrightarrow{ق ه} = ٢٠$ حتا ٣٠° $\overrightarrow{س}$

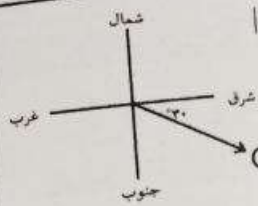
$- ٢٠$ حا ٣٠° $\overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ق ه} = ١٠\sqrt{٣} \overrightarrow{س} - ١٠ \overrightarrow{ص}$

(جـ) $\|-٤ \overrightarrow{أ}\| = ٢\|\overrightarrow{ك أ}\|$

$\therefore ٤ = ٢|ك|$

$\therefore ك = \pm ٢$



(ء) بفرض أن محور السينات يقطع $\overline{أب}$ في نقطة (هـ) = (س ، ٠)

$\therefore ص = \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

صفر $= \frac{ل_١ \times -٨ + ل \times ٤}{ل_١ + ل_٢}$

$-٨ل_١ + ٤ل_٢ = ٠$ $\therefore ٢ل_١ = ل_٢$

$\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢} < ١$

$\therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ١ : ٢

إحداثي نقطة س $= \frac{١ \times ٦ + ٢ \times -٣}{٢ + ١}$

= صفر

$\therefore$ النقطة هي (٠ ، ٠) نقطة الأصل

فإن محور السينات يقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

(٢) (أ) ميل المستقيم الأول $= م_١$

$= \frac{-٢}{١} = -٢$

ميل المستقيم الثاني $= م_٢ = \frac{-٢}{١} = -٢$

$\because م_١ = م_٢$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان

$\because$ (٠ ، ٤) تقع على المستقيم الأول

$\therefore$ البعد $= \frac{|٢ + ٤ + ٠ \times ٢|}{\sqrt{١ + ٤}} = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

(ب) سبق البرهنة في المنوفية رقم (٢) (أ)

(٣) (أ) ميل الأول $= م_١ = \frac{-١}{-ك} = \frac{١}{ك}$

$م_٢ = \frac{-٢}{-١} = ٢$

$\because$ طا $\frac{\pi}{٤} = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right|$

$\frac{٢ - \frac{١}{ك}}{\frac{٢}{ك} + ١} = ١ \pm ٠ \left|\frac{٢ - \frac{١}{ك}}{٢ \times \frac{١}{ك} + ١}\right| = ١$

الحالة الأولى : $\frac{٢ - \frac{١}{ك}}{\frac{٢}{ك} + ١} = -١$

$٢ - \frac{١}{ك} = -\frac{٢}{ك} - ١$

$\frac{٣}{ك} = ١$ $\therefore$ **ك = ٣**

الحالة الثانية : $\frac{٢ - \frac{١}{ك}}{\frac{٢}{ك} + ١} = ١$

$٢ - \frac{١}{ك} = ٢ + \frac{١}{ك}$

$-\frac{١}{ك} = ١$ $\therefore$ **ك = −١**

(ب) ميل المستقيم = ظا ٤٥ = ١

$\therefore$ منحنى اتجاه المستقيم = (١ ، ١)

$\therefore$ المعادلة الاتجاهية

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، -٤) + ك(١ ، ١)$

المعادلتان البارامتريتان

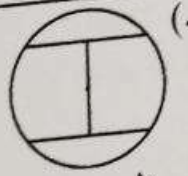
$س = ٣ + ك$ ، $ص = -٤ + ك$

$\therefore$ المعادلة الإحداثية :

$ك = س - ٣ = ص + ٤$

$\therefore$ **س − ص − ٧ = ٠**

(٤) (أ) البعد بين (٠ ، ٠) والوتر الأول



$\therefore$ البعد

$= \frac{|١٠ + ٠ \times ٤ + ٠ \times ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

والبعد بين (٠ ، ٠) والوتر الثاني

البعد $= \frac{|٢٦ + ٠ \times ١٢ - ٠ \times ٥|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$

$\because$ البعد بينهما متساوي

$\therefore$ الوتران متساويان

(ب) نقطة تقاطع المستقيمين

$٢س + ص = ٥$ ..... (١)

$س + ٥ص = ١٦$ ..... (٢)

بحلهما ∴ س = ١ ، ص = ٣

∴ النقطة (١ ، ٣) نقطة التقاطع وميل المستقيم المعلوم = $\frac{-١}{-١}$ = ١

∴ ميل المستقيم العمودى على المستقيم المعلوم = -١

∴ معادلة المستقيم المطلوب

(ص - ٣) = -١(س - ١)

ص - ٣ + س - ١ = ٠

∴ **ص + س - ٤ = ٠**

(١١) امتحان منطقة اسيوط ١٤٣٩هـ/٢٠١٨م

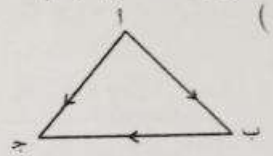
(١) (أ) $\overrightarrow{أ}$

= (٦ حتا $\frac{\pi}{٣}$) $\overrightarrow{ص}$ + (٦ حا $\frac{\pi}{٣}$) $\overrightarrow{ص}$

= ٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٣√٣ $\overrightarrow{ص}$

(ب) الزاوية ٩٠° من الرسم

(جـ)



∵ $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{أجـ}$

∴ $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بجـ}$ + $\overrightarrow{أجـ}$ = $\overrightarrow{أجـ}$ + $\overrightarrow{أجـ}$

∴ $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بجـ}$ + $\overrightarrow{أجـ}$ = ٢ $\overrightarrow{أجـ}$

(د) نقطة تلاقى المتوسطات

= $(\frac{٢+١+٦}{٣} ، \frac{١+٥-٣}{٣})$

= (٣ ، ١)

(أ) المعادلة الإتجاهية

$\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، -٥) + ك(٣ ، ١)

المعادلة الإحداثية : $\frac{ص+٥}{س+٢} = \frac{١}{٣}$

ص + ١٥ = س + ٢

٣ص - س + ١٣ = ٠

(ب)

س = $\frac{٢ \times ٣ + ١ \times ٢}{٣ + ٢} = \frac{٢٠}{٥}$ = ٤

ص = $\frac{٢ \times ٣ + ٤- \times ٢}{٣ + ٢} = \frac{١٠}{٥}$ = ٢

∴ جـ = (٤ ، ٢)

(٣) (أ) تحويل المعادلة الاتجاهية إلى الإحداثية

∴ ص - ٢ = $\frac{-٣}{٤}$(س + ١)

∴ ٤ص - ٨ = -٣س - ٣

∴ ٤ص + ٣س - ٥ = ٠

(ب) ∥ $\overrightarrow{أ}$ ∥ = $\sqrt{١٦ + ٤٨}$ = ٨

∵ ظا θ = $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}٤}{٤}$

∴ ق(θ̂) = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

∴ و$\overrightarrow{أ}$ = (٨ ، $\frac{\pi}{٣}$)

(٤) (أ) نقطة التقاطع

٢س + ص = ٨ ..... (١)

س - ص = ١ ..... (٢)

من(١) ، (٢) س = ٣ ، ص = ٢

∴ النقطة (٣ ، ٢)

∴ معادلة التى توازى محور الصادات

هى **س = ٣**

(ب) ٤ك ∥ $\overrightarrow{أ}$ ∥ = ٣ ∥ $\overrightarrow{أ}$ ∥

٤ك = ٣ ∴ **ك = $\frac{٣}{٤}$**

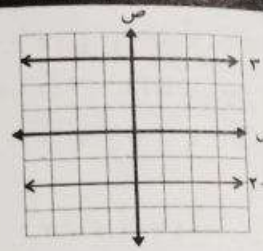
لا تنسى أن تسألوا عن بقية سلسلة المرشد

فى المواد : الثقافية - والشرعية

فهى خير معين لك على النجاح

(١٢) امتحان منطقة القاهرة ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ)



البُعد بين المستقيمين = ٥ وحدات

(ب) ميل الأول = ميل الثانى

∴ $\frac{-أ}{٣} = \frac{-٢}{-٣}$ ∴ أ = -٢

(جـ) نقطة تقاطع المستقيمين (٣ ، ٣)

ونقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = \frac{٣ - ٠}{٣ - ٠}$ = ١

∴ ص - ٣ = س - ٣ ∴ ص = س

(د)

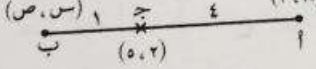
∴ $\frac{-٣ + س}{٢}$ = ٣ ∴ -٣ + س = ٦

∴ س = ٩ ، ∴ $\frac{٧ + ص}{٢}$ = ٦

∴ ٧ + ص = ١٢

∴ ص = ٥ ∴ ب = (٩ ، ٥)

(٢) (أ)



، ٢ = $\frac{١ \times ٨ + ٤س}{١ + ٤}$

∴ ١٠ = ٨ + ٤س ∴ ٤س = ٢

∴ س = $\frac{١}{٢}$

، ٥ = $\frac{١ \times ٣ + ٤ص}{١ + ٤}$

∴ ٢٥ = ٣ + ٤ص ∴ ٢٢ = ٤ص

∴ ص = $\frac{١١}{٢}$ ∴ ب = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$)

(ب) طول العمود = $\frac{|١ \times ١ + ١ \times ١|}{\sqrt{١ + ١}}$

= $\frac{٢}{٢\sqrt{}}$ وحدات طول

(٣) (أ) م$_١$ = $\frac{-٣}{٤}$ ، م$_٢$ = $\frac{-١}{٧}$

∴ ظا θ = $\left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}\right| = \left|\frac{\frac{-١}{٧} + \frac{-٣}{٤}}{١ + \frac{-١}{٧} \times \frac{-٣}{٤}}\right|$

= $\frac{\frac{١٧}{٢٨}}{\frac{٣١}{٢٨}} = \frac{١٧}{٣١}$

∴ ق(θ̂) = ٢٨° ٤٤′ ٢٣″

(ب) المعادلة المتجهة للمستقيم :

$\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ق}$ + ك $\overrightarrow{ى}$

∴ المتجه (-١ ، ٢) عمودى عليه

، $\overrightarrow{ى}$ = (٢ ، ١)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (-٣ ، ٥) + ك(٢ ، ١)

∵ س = -٣ + ٢ك ص = ٥ + ك

∴ ك = $\frac{س + ٣}{٢}$ ك = $\frac{ص - ٥}{١}$

∴ $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص - ٥}{١}$

∴ س + ٣ = ٢ص - ١٠

∴ س - ٢ص + ١٣ = ٠ المعادلة الكارتيزية

(٤) (أ) بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{س}{٤}$ = ١

∴ طولا الجزئين المقطوعين من المحورين السينى والصادات هما ٤ ، ٣ على الترتيب .

(ب) ∵ أ$_١$س + ب$_١$ص + جـ$_١$

+ ك(أ$_٢$س + ب$_٢$ص + جـ$_٢$) = ٠

∴ س + ٢ص - ٥ + ك(٢س - ٣ص + ٤) = ٠

(-٢ ، ٤) ∋ المستقيم

∴ -٢ + ٢ × ٢ - ٤ × ٣ + ٤ = ٠

+ ك(٢ × -٢ - ٣ × ٤ + ٤) = ٠

$\therefore ١ + ك(-١٢) = ٠$ $\therefore$ ك $= \frac{١}{١٢}$

$\therefore$ س^{٢} + ٢ص − ٥ + $\frac{١}{١٢}$(٢س^{٢} − ٣ص + ٤) = ٠

$\therefore$ ١٢س^{٢} + ٢٤ص − ٦٠ + ٢س^{٢} − ٣ص + ٤ = ٠

$\therefore$ ١٤س^{٢} + ٢١ص − ٥٦ = ٠ (÷ ٧)

$\therefore$ ٢س^{٢} + ٣ص − ٨ = ٠

(١٣) امتحان منطقة الغربية ١٤٣٨هـ/٢٠١٧م

(١) (أ) $م_{١} = \frac{-١}{-٣}$ ، $م_{٢} = \frac{-١}{٢}$

$\therefore$ ظا هـ $= \left|\frac{م_{٢} - م_{١}}{١ + م_{١} م_{٢}}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}\right|$

$\therefore$ ظا هـ = ١ $\therefore$ ق(هـ) = ٤٥°

(ب) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٤ ، −٥) − (١ ، −١)

= (٣ ، −٤)

$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

(جـ) ٣ك = ١٢ $\therefore$ ك = ٤

(د) ١٢$\sqrt{٢}$ حتا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

، ١٢$\sqrt{٢}$ حا $\frac{\pi}{٤}$ = ١٢

$\therefore \overrightarrow{م} = ١٢\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$

(٢) (أ) $\overline{أ}$ // $\overline{ب}$ $\therefore$ $\frac{ص_{٢}}{س_{٢}} = \frac{ص_{١}}{س_{١}}$

$\therefore \frac{ك}{٦} = \frac{-١}{٣}$ ⇐ ٣ك = −٦ $\therefore$ ك = −٢

، $\overline{أ} \perp \overline{ب}$ ⇐ $\frac{ص_{٢}}{س_{٢}} \times \frac{ص_{١}}{س_{١}} = -١$

$\therefore \frac{ك}{٦} \times \frac{-١}{٣} = -١$ $\therefore$ ك = ١٨

(ب) في Δ أ ب ء :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$

(بالضرب × ٢)

$\therefore ٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} = ٢\overrightarrow{أ ء}$ ..... (١)

في Δ أ ء جـ :

$\overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$ (بالضرب × ٣)

$\therefore ٣\overrightarrow{أ جـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٣\overrightarrow{أ ء}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع :

$٢\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{ب ء} + ٣\overrightarrow{أ جـ} + ٣\overrightarrow{جـ ء}$

$= ٥\overrightarrow{أ ء}$

$\because ٢\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{جـ ء}$

$\therefore ٢\overrightarrow{ب ء} - ٣\overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore ٢\overrightarrow{ب ء} + ٣\overrightarrow{جـ ء} = ٢\overrightarrow{ب ء} - ٣\overrightarrow{جـ ء}$

$= \overrightarrow{٠}$

$\therefore ٢\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{أ جـ} = ٥\overrightarrow{أ ء}$

(٣) (أ) ميل المستقيم المعلوم = $\frac{٣}{٤}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب :

$\frac{ص - ٥}{س - ٢} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore ٤ص - ٢٠ = ٣س - ٦$

$\therefore ٤ص - ٣س - ١٤ = ٠$

(ب) ميل المستقيم الأول = $\frac{٤}{٣}$

، ميل المستقيم الثانى = $\frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore$ الميلان متساويان

$\therefore$ المستقيمان متوازيان

نعتبر نقطة (٠ ، $\frac{٧}{٣}$) تقع على المستقيم الأول

بُعدها عن المستقيم :

$٥س - ٣ص + ١٧ = ٠$

$\therefore$ البعد $= \left|\frac{١٧ + \frac{٧}{٣} \times ٣ - ٠ \times ٤}{\sqrt{٩ + ١٦}}\right| = \frac{١٠}{٥} = ٢$