



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الصف الثالث الإعدادي

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الدكتور / عصام وصفي روفائيل

الأستاذ الدكتور / عفاف أبو الفتوح صالح

الأستاذ / كمال يونس كبشة

الأستاذ / سيرافيم الياس اسكندر

مراجعة

أ/فتحى حسن شحاتة

أ/سمير محمد سعادوى

إشراف علمي

مستشار الرياضيات

أ/ جمال الشاهد

إشراف تربوي

مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

طبعة: ٢٠٢٢ / ٢٠٢٣ م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب
خارج وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني

.....: الاسم

.....: المدرسة

.....: الفصل

.....: العنوان

.....: العام الدراسي

مقدمة الكتاب

أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادي، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملاً ممتعاً ومفيداً له تطبيقاته في حياتكم العملية، وفي دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقذروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسي، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفي نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى في هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوي لكم، وما سبق أن درستموه في الصفوف السابقة، كما راعينا في مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتي لديكم، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلي كلما كان ذلك مناسباً داخل المحتوى.

وفي الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات: يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص، واختيار في نهاية كل وحدة، وفي نهاية الفصل الدراسي يوجد نماذج اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصيرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى: العلاقات و الدوال

- (١ - ١) حاصل ضرب الديكارتى ٢
- (٢ - ١) العلاقات ٨
- (٣ - ١) الدالة (التطبيق) ١٠
- (٤ - ١) دوال كثيرات الحدود ١٣

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى

- (١ - ٢) النسبة ١٨
- (٢ - ٢) التناسب ٢٠
- (٣ - ٢) التغير الطردى و التغير العكسى ٢٦

الإحصاء

الوحدة الثالثة : الإحصاء

- (١ - ٣) جمع البيانات ٣٢
- (٢ - ٣) التشتت ٣٦



حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

- (١ - ٤) النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة ٤٤
- (٢ - ٤) النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا ٤٧

الهندسة التحليلية

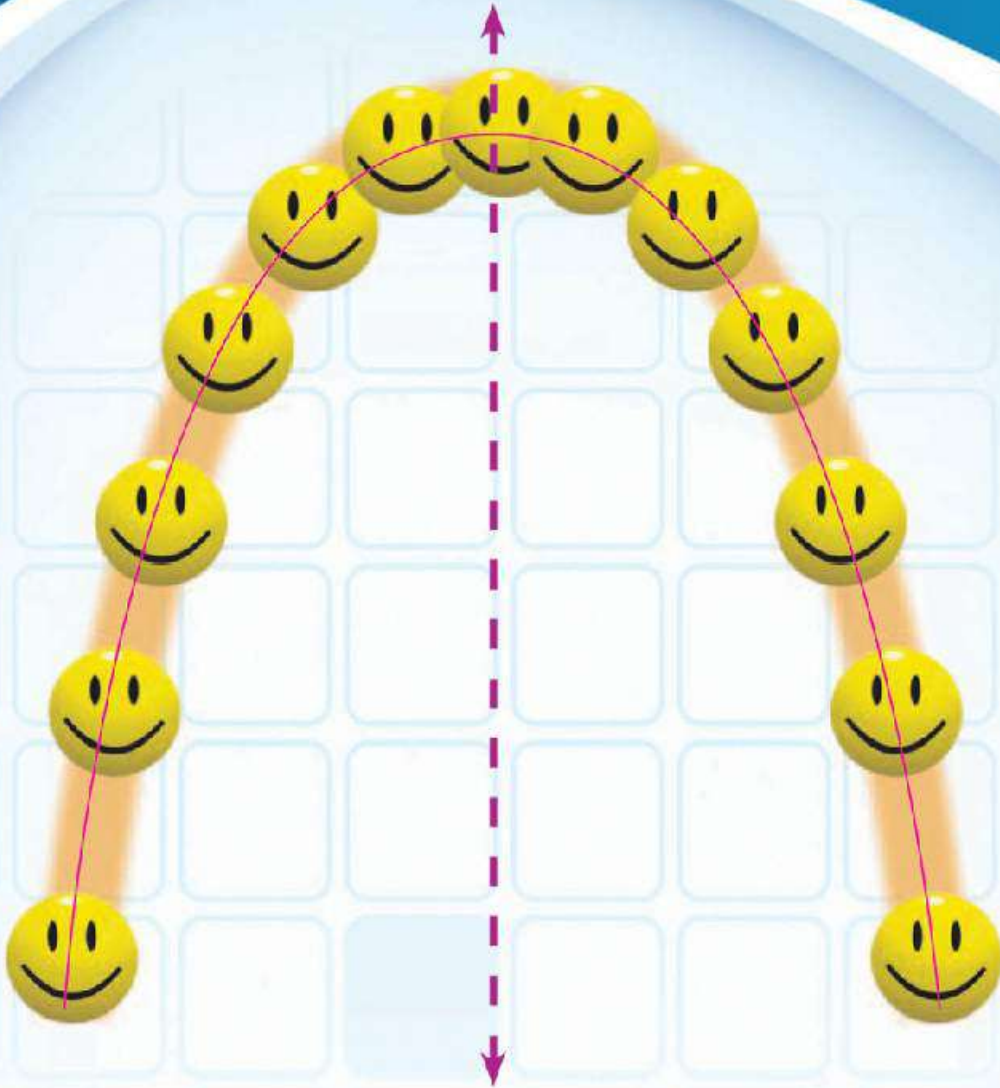
الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية

- (١ - ٥) البعد بين نقطتين ٥٤
- (٢ - ٥) إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة ٥٧
- (٣ - ٥) ميل الخط المستقيم ٦٠
- (٤ - ٥) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات ٦٥

الأنشطة والتدريبات والأختبارات ص ١-٤٤

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	$\perp$	عمودي على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	$//$	يوازي
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB
ن	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{AB}$	الشعاع AB
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{AB}$	المستقيم AB
$\sqrt[n]{}$	الجذر التربيعي للعدد A	$\angle (A)$	قياس زاوية A
$\sqrt[n]{}$	الجذر التكعيبي للعدد A	$\widehat{(AB)}$	قياس القوس AB
$[A, B]$	فترة مغلقة	$\sim$	تشابه
$[A, B[$	فترة مفتوحة	$<$	أكبر من
$[A, B]$	فترة نصف مفتوحة	$\leq$	أكبر من أو تساوي
$]A, B]$	فترة نصف مفتوحة	$>$	أقل من
$]A, \infty[$	فترة غير محدودة	$\geq$	أقل من أو تساوي
$\equiv$	تطابق	$L(A)$	احتمال وقوع الحدث A
$n(A)$	عدد عناصر الحدث A	$\bar{s}$	الوسط الحسابي
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف المعياري
		بح أو $\sum$	المجموع



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.
هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

حاصل الضرب الديكارتي

فكر وناقش

- سبق وأن درست العلاقة بين متغيرين س، ص.
- أوجد مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة:
ص = ٢س - ١ عندما س = ٠، س = ١، س = ٢
 - مثل هذه الأزواج المرتبة بيانيًا في المستوى الإحداثي.
 - هل الزوج المرتب (٥، ٣) يساوي الزوج المرتب (٣، ٥)؟
(استعن بالرسم).
- مما سبق نلاحظ:

- في الزوج المرتب (أ، ب) يسمى أ بالمسقط الأول، ب بالمسقط الثاني.
- كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة وواحدة فقط في المستوى الإحداثي.
- إذا كان $a \neq b$ فإن $(a, b) \neq (b, a)$ ، لماذا؟
- $(a, b) \neq (a, b)$.
- إذا كان $(a, b) = (س, ص)$ فإن $a = س$ ، $b = ص$

مثال ١

أوجد س، ص إذا كان: $(س - ٢, ٣) = (٥, ص + ١)$

الحل

$$س - ٢ = ٥ \quad \therefore س = ٧, \quad ٣ = ص + ١ \quad \therefore ص = ٢$$

تدرب

أوجد أ، ب في كل مما يأتي:

- $(٩, ٥) = (ب, أ)$
- $(٣, ٢) = (١ + ب, ٢ - أ)$
- $(٦, ٣) = (٣ - أ, ١ - ب)$
- $(٢٦, ٧) = (٢ - ب, ١ - أ)$

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين.

مصطلحات أساسية

- زوج مرتب
- حاصل ضرب ديكارتي
- مخطط سهمي
- مخطط بياني
- علاقة



مثال ٢

إذا كانت $S = \{a, b\}$ ، $S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ **فاوجد:**

$S \times S$ ، $S \times S$ ، ماذا تلاحظ؟

الحل

لإيجاد حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة S في المجموعة S ويرمز له بالرمز $S \times S$ ، نكتب مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر من S ، ومسقطها الثاني عنصر من S فيكون:

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

نلاحظ أن: $S \times S \neq S \times S$

ويمكن الحصول على $S \times S$ من الجدولين الآتيين:

المسقط الثاني		×	
ب	ا		
(ب، ا)	(ا، ا)	ا	المسقط الأول
(ب، ب)	(ا، ب)	ب	
(ب، ب)	(ا، ب)	ب	

المسقط الثاني			×	
١-	٠	٣		
(١-، ا)	(٠، ا)	(٣، ا)	ا	المسقط الأول
(١-، ب)	(٠، ب)	(٣، ب)	ب	

فكر:

١ متى يكون $S \times S = S \times S$ ؟

٢ هل عدد عناصر $S \times S$ = عدد عناصر $S \times S$ ؟

ملاحظات:

١ إذا كانت S ، S مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين،

فإن: $S \times S = \{(a, b) : a \in S, b \in S\}$

٢ $S \times S \neq S \times S$ **حيث:** $S \neq S$

$$S \times S = (S \times S) \cup (S \times S) = (S \times S) \cup (S \times S)$$

حيث S ترمز إلى عدد عناصر المجموعة.

٣ إذا كان $(a, b) \in S \times S$ **فإن** $a \in S$ ، $b \in S$

٤ إذا كانت S مجموعة غير خالية

فإن: $S \times S = \{(a, b) : a \in S, b \in S\}$

و تكتب أحياناً S^2 وتقرأ (س اثنين).

مثال ٣

إذا كانت $S = \{1\}$ ، $V = \{2, 3\}$ ، $E = \{2, 5, 6\}$ مثل المجموعات S ، V ، E بشكل فن ثم أوجد:

- أولاً: أ $S \times V$ ب $V \times E$ ج $S \times E$ د V^2
 ثانياً: $(S \times V) \cup (V \times E)$ ثالثاً: $S \times (V \cap E)$
 رابعاً: $(S \times V) \cap (S \times E)$ خامساً: $(E - V) \times (S \cup V)$

الحل

أولاً:

أ $S \times V = \{1\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3)\}$

ب $V \times E = \{2, 3\} \times \{2, 5, 6\} = \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\}$

ج $S \times E = \{1\} \times \{2, 5, 6\} = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6)\}$

د $V^2 = V \times V = \{2, 3\} \times \{2, 3\} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ثانياً: $(S \times V) \cup (V \times E) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\}$

ثالثاً: $S \times (V \cap E) = \{1\} \times \{2\} = \{(1, 2)\}$

رابعاً: $(S \times V) \cap (S \times E) = \{(1, 2)\}$

خامساً: $E - V = \{5, 6\}$ ، $\therefore (E - V) \times (S \cup V) = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$ أكمل

تدرب

إذا كانت $S = \{1, 2\}$ ، $V = \{0, 4\}$ ، $E = \{2, 5, 6\}$ أوجد

- أ $S \times V$ ب $V \times E$ ج $S \times E$ د V^2
 هـ $(S \times V) \cup (V \times E)$ و $(S \times E) \cap (S \times V)$

تمثيل حاصل الضرب الديكارتي:

مثال ٤

إذا كانت $S = \{1, 2\}$ ، $V = \{3, 4, 5\}$ أوجد: $S \times V$ ، ومثله:

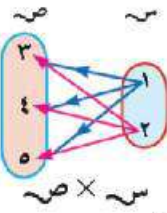
أولاً: بالمخطط السهمي. ثانياً: بالمخطط البياني.



الحل

$$\{(0,2), (4,2), (3,2), (0,1), (4,1), (3,1)\} = \{0,4,3\} \times \{2,1\} = \text{س} \times \text{هـ}$$

ويمثل حاصل الضرب الديكارتي $\text{س} \times \text{هـ}$ بمخطط سهمي أو شبكة بيانية، كما يلي:



أولاً: المخطط السهمي

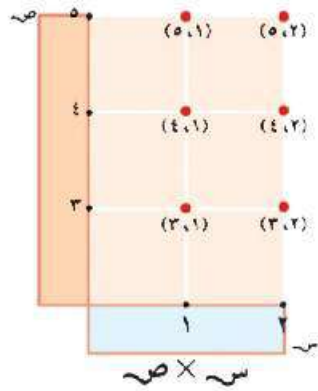
نرسم سهمًا من كل عنصر يمثل المسقط الأول (وهي عناصر المجموعة سـ)

إلى كل عنصر يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة هـ)

أي أن: المخطط السهمي لحاصل الضرب الديكارتي يُمثل كل زوج مرتبٍ بسهم يخرج من مسقطه الأول وينتهي عند مسقطه الثاني.

ثانياً: المخطط البياني (الشبكة البيانية المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة سـ أفقيًا، وعناصر المجموعة هـ رأسيًا فتكون نقطُ تقاطع الخطوط الأفقية والرأسيّة تمثل الأزواج المرتبة لعناصر حاصل الضرب الديكارتي $\text{س} \times \text{هـ}$.



مثال 5

إذا كانت $\text{س} = \{8, 4, 3\}$ فأوجد $\text{س} \times \text{هـ}$ ومثله بمخطط سهمي.

الحل

$$\text{س} \times \text{هـ} = \{8, 4, 3\} \times \{8, 4, 3\}$$

$$= \{(8,8), (4,8), (3,8), (8,4), (4,4), (3,4), (8,3), (4,3), (3,3)\}$$

ويلاحظ في الشكل: قد مُثلت الأزواج المرتبة بأسهم، وأن الأزواج المرتبة التي فيها المسقط الأول يساوي المسقط الثاني مثل $(3,3)$ ، $(4,4)$ ، $(8,8)$ مُثلت بعروة لتدل على أن السهم يخرج من النقطة، وينتهي عند نفس النقطة.

لاحظ أن: $3 = (\text{س})$ فتكون: $9 = 3 \times 3 = (\text{س} \times \text{هـ})$

وفي هذه الحالة يمثل حاصل الضرب الديكارتي $\text{س} \times \text{هـ}$ بيانيًا بتسع نقاط، وكل نقطة تمثل زوجًا مرتبًا.

أما إذا كانت سـ مجموعة غير منتهية (لا يمكن حصر عدد عناصرها) فإن:

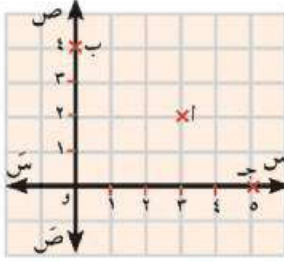
عدد عناصر $\text{س} \times \text{هـ}$ سيكون غير منته.

فكر: كيف يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لكل من:

$$\text{ط} \times \text{ط}, \text{ص} \times \text{ص}, \text{هـ} \times \text{هـ}, \text{ح} \times \text{ح}$$

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية والتُمثيل البياني له.

أولاً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $ط \times ط = \{(س، ص) : س \in ط، ص \in ط\}$



١ نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما $س$ أفقيًا والآخر $ص$ رأسيًا ومتقاطعين في النقطة و.

٢ نمثل الأعداد الطبيعية $ط$ على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي مبتدئين بالنقطة (و) التي تمثل العدد صفر.

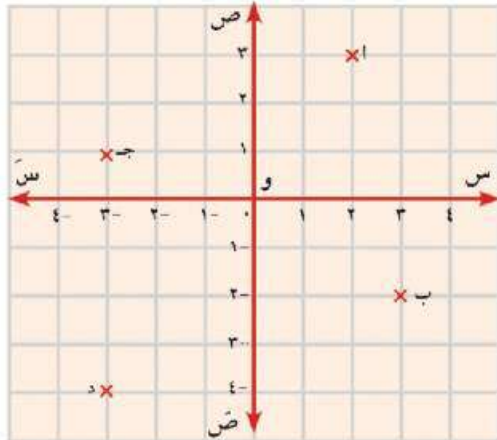
٣ نرسم مستقيمتين رأسيّة وأخرى أفقيّة من النقط التي تمثل الأعداد الطبيعية، سوف نحصل على الشكل المقابل، وتكون نقط التقاطع لمجموعة هذه المستقيمتين ممثلة للشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي $ط \times ط$.

لاحظ أن: كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي $ط \times ط$.

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢، ٣)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٤، ٠)

أكمل: النقطة جـ تمثل الزوج المرتب (،)، النقطة د تمثل الزوج المرتب (،)

ثانياً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $ص \times ص = \{(ص، ص) : ص \in ص، ص \in ص\}$.



نمثل مجموعة الأعداد الصحيحة على كلٍّ من المستقيمين الأفقي والرأسي حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

فتكون كل نقطة من نقط الشبكة تمثل أحد الأزواج في حاصل الضرب الديكارتي $ص \times ص$.

وتعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثي $ص \times ص$

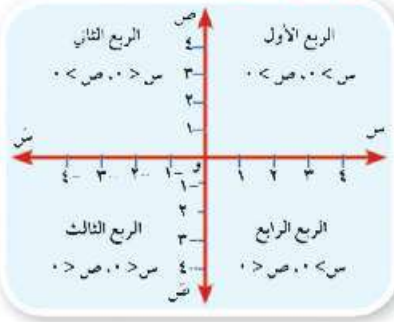
فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، ٢)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٢، -٣)



ثالثاً: لتمثيل حاصل ضرب الديكارتى $U \times U = \{(s, s) : s \in U, s \in U\}$

ارسم شبكة بيانية متعامدة ومثل مجموعة الأعداد النسبية U على المستقيمين الأفقي والرأسي، ثم عيّن عليها النقط: أ $(\frac{0}{4}, \frac{3}{4})$ ، ب $(\frac{3}{4}, -\frac{2}{4})$ ، ج $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ ، د $(\frac{3}{4}, -\frac{0}{4})$

رابعاً: تمثيل حاصل ضرب الديكارتى $E \times E = \{(s, s) : s \in E, s \in E\}$



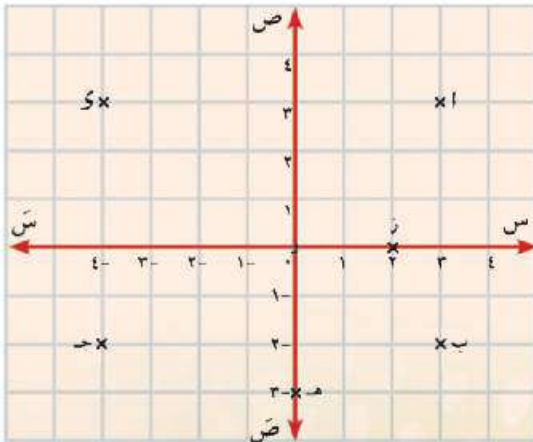
حيث تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على كل من المستقيمين الأفقي والرأسي، كما تمثل النقطة (و) الزوج المرتب $(0, 0)$ يسمى المستقيم الأفقي $\overleftrightarrow{س س}$ محور السينات، ويسمى المستقيم الرأسى $\overleftrightarrow{ص ص}$ محور الصادات فتتقسم الشبكة إلى أربعة أقسام (أرباع) كما بالشكل المقابل:

مثال 6



كوّن شبكة تربيعة متعامدة لحاصل ضرب الديكارتى $E \times E$ ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي ينتمي إليه كل من النقط الآتية:

أ $(3, 3)$ ، ب $(2, -3)$ ، ج $(-2, -4)$ ، د $(3, -4)$ ، هـ $(3, 0)$ ، ز $(0, 2)$



الحل

- | | |
|--------------|----------------------|
| أ $(3, 3)$ | تقع في الربع الأول |
| ب $(2, -3)$ | تقع في الربع الرابع |
| ج $(-2, -4)$ | تقع في الربع الثالث |
| د $(3, -4)$ | تقع في الربع الثاني |
| هـ $(3, 0)$ | تقع على محور الصادات |
| ز $(0, 2)$ | تقع على محور السينات |

العلاقات

مفكر وناقش



في مهرجان القراءة للجميع ذهب خمسة تلاميذ يمثلون المجموعة س = {أ، ب، ج، د، هـ} إلى مكتبة المدرسة لقراءة بعض الكتب التي تمثلها المجموعة ص = {علوم، أدب، ثقافة، تاريخ}. فقرأ التلميذ (أ) كتاباً من كتب العلوم، وكتاباً من كتب الثقافة، وقرأ التلميذ (ب) كتاباً من كتب التاريخ، وقرأ التلميذ (ج) كتاباً أدبياً، وقرأ التلميذ (هـ) كتاباً من كتب التاريخ، ولم يقرأ التلميذ (د) أيّاً من هذه الكتب.

١ اكتب العبارات السابقة في صورة أزواج مرتبة من س إلى ص.

٢ مثل مجموعة الأزواج المرتبة السابقة في صورة مخطط سهمي.

لاحظ أن: التعبير «قرأ» قد ربط بين بعض عناصر المجموعة س ببعض عناصر المجموعة ص أي أن التعبير «قرأ» يعين علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص وسنرمز لها عادة بالرمز ع وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمخطط سهمي كالمبين بالشكل المقابل، حيث نرسم سهمًا يبدأ من التلميذ، وينتهي عند نوع الكتب التي قرأها. كما نستطيع أن نعبر عن العلاقة من س إلى ص بمجموعة الأزواج المرتبة الآتية:



{(أ، علوم)، (أ، ثقافة)، (ب، تاريخ)، (ج، أدب)، (هـ، تاريخ)}.

هذه المجموعة من الأزواج المرتبة تسمى بيان العلاقة ع.

فكر: هل بيان العلاقة ع مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي س × ص؟

مثال ١



إذا كانت س = {-١، ١، ٢}، ص = {٢، ٤، ٦، ٨}، وكانت ع علاقة من س إلى

ص حيث أ ع ب تعني: «ب = ٢ + ٤»، لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

سوف تتعلم

☆ مفهوم العلاقة من مجموعة

س إلى مجموعة ص.

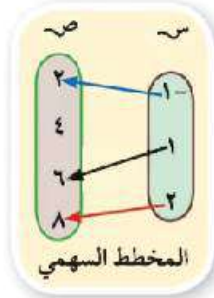
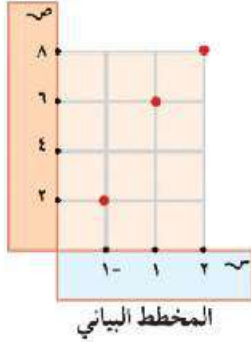
☆ مفهوم العلاقة من مجموعة

إلى نفسها.

مصطلحات أساسية

☆ علاقة.

☆ بيان العلاقة.



الحل

$$\begin{aligned} \text{عندما } 1- &= 1- \\ \text{عندما } 1 &= 1- \\ \text{عندما } 2 &= 2- \\ \therefore 2 &= 4 + (1-) \times 2 = \text{ب} \\ \therefore 6 &= 4 + 1 \times 2 = \text{ب} \\ \therefore 8 &= 4 + 2 \times 2 = \text{ب} \\ \therefore \text{ع} &= \{(1-, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

مما سبق نستنتج أن

- ١ العلاقة من مجموعة S إلى مجموعة T حيث S ، T مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر S ببعض أو كل عناصر T .
- ٢ بيان العلاقة من مجموعة S إلى مجموعة T هي مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول في كل منها ينتمي إلى المجموعة S ، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة T .
- ٣ إذا كانت E علاقة من مجموعة S إلى مجموعة T فإن $E \subseteq S \times T$.

العلاقة من مجموعة إلى نفسها

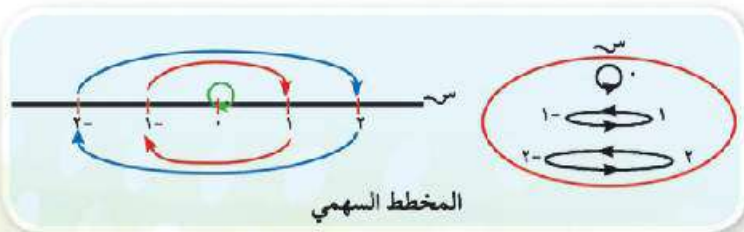
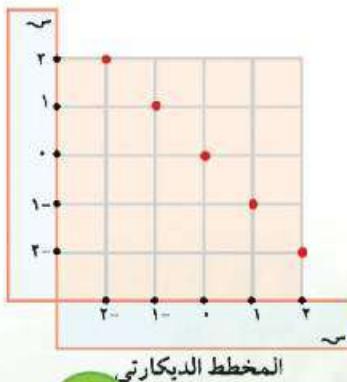
إذا كان E علاقة من S إلى S فإن E تسمى علاقة على المجموعة S وتكون $E \subseteq S \times S$.

مثال ٢

إذا كانت $S = \{1-, 1, 0, 1-, 2-\}$ وكانت E علاقة معرفة على S حيث $A \in B$ تعني: «العدد A معكوس جمعي للعدد B ». لكل A, B $B \in S$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر ديكارتي.

الحل

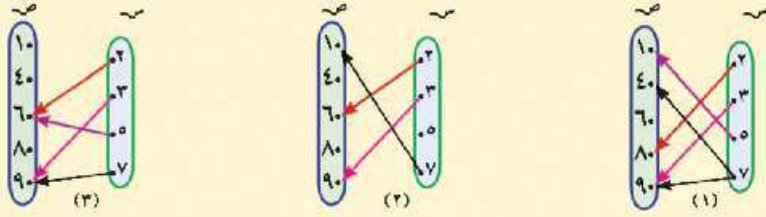
$$E = \{(2-, 2), (1-, 1), (0, 0), (1, 1-), (2, 2-)\}$$



الدالة (التطبيق)

فكر وناقش

الأشكال الآتية تمثل ثلاث علاقات من S إلى S .



١ اكتب بيان كل علاقة ومثلها بمخطط بياني.

٢ أي من هذه العلاقات تحقق الشرط التالي: كل عنصر من عناصر S مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر « S ».

تعريف

يقال لعلاقة من مجموعة S إلى مجموعة S أنها دالة إذا كان: كل عنصر من عناصر S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

التعبير الرمزي للدالة:

١ يرمز للدالة بأحد الرموز: d أو f أو S أو ...
والدالة d من المجموعة S إلى المجموعة S تكتب رياضياً:
 $d: S \rightarrow S$ وتقرأ: «دالة من S إلى S ».

ملاحظات:

١ إذا كانت d دالة من المجموعة S إلى نفسها نقول إن d دالة على S .
٢ إذا كان الزوج المرتب (S, d) ينتمي لبيان الدالة فإن العنصر S يسمى صورة العنصر S بالدالة d . ونعبر عنه بإحدى الصورتين.

$d(S) = S$ وتقرأ الدالة: d ترسم S إلى S
أو $d(S) = S$ وتقرأ: d دالة حيث $d(S) = S$



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم الدالة
- ☆ كيفية التعبير رمزيا عن الدالة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة
- ☆ مجال
- ☆ المجال المقابل
- ☆ مدى

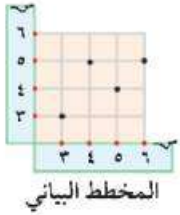


مثال ١

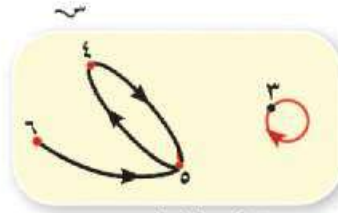
إذا كانت د دالة على $S = \{3, 4, 5, 6\}$ وكان $f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 4, f(6) = 5$.
مثل د بمخطط سهمي وآخر بياني، اكتب بيانها.

الحل

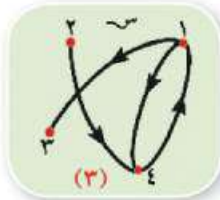
بيان د = $\{(3, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 5)\}$



المخطط البياني



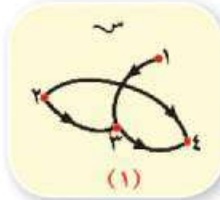
المخطط السهمي



(٣)



(٢)



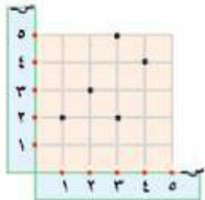
(١)

١ إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فأَي
من المخططات السَّهمية الآتية تعبّر

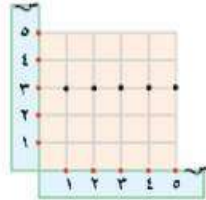
عن دالة على المجموعة S

٢ أي من المخططات البيانية الآتية

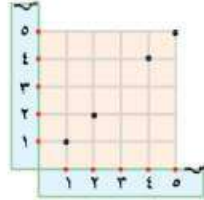
تعبّر عن دالة من S إلى S .



(٣)



(٢)



(١)

فكّر: هل كل علاقة دالة؟ فسّر إجابتك وأعط أمثلة.

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كانت د دالة من المجموعة S إلى المجموعة T ، أي أن: $S \rightarrow T$ فإن:
المجموعة S تسمى مجال الدالة د.

المجموعة T تسمى المجال المقابل للدالة د.

مجموعة صور عناصر مجموعة المجال S بالدالة د تسمى مدى الدالة.

فمثلاً: إذا كانت $S = \{1, 2, 3\}$ فإن

$S = \{1, 2, 3\}$ ، $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، بيان د = $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ فإن:

١ مجال الدالة د هو المجموعة $S = \{1, 2, 3\}$

٢ المجال المقابل للدالة د هو المجموعة $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

٣ مدى الدالة د هو مجموعة صور عناصر المجموعة S بواسطة الدالة د = $\{2, 3, 4\}$

لاحظ أن: المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة.

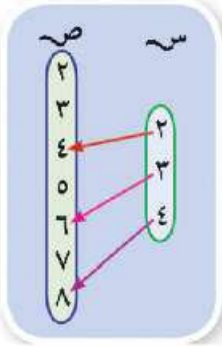
مثال ٢



إذا كانت $S = \{2, 3, 4\}$ ، $V = \{ص : ص \geq 2, ص < 9\}$ حيث T مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت E علاقة من S إلى V حيث $A \in B$ تعني: « $\frac{1}{A} = B$ » لكل $A \in S$ ، $B \in V$ ، اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي. بين أن E دالة من S إلى V وأوجد مداها.

الحل

$S = \{2, 3, 4\}$ ، $V = \{ص : ص \geq 2, ص < 9\}$ بيان $E = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$
 E دالة لأن كل عنصر من عناصر S يخرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر V
 مدى الدالة $E = \{4, 6, 8\}$

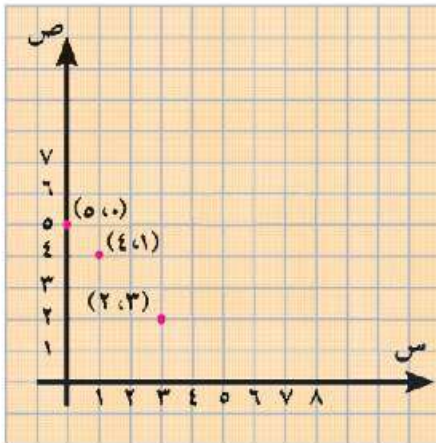


مثال ٣



إذا كانت $S = \{0, 1, 3\}$ ، $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ وكانت $D : S \rightarrow V$
 حيث $D(S) = S - 5$. أوجد : ١- أوجد صور عناصر S بالدالة D .
 ٢- ارسم مخطط بياني للدالة D .

الحل



$D(S) = S - 5$
 $D(0) = 5$ ، $D(1) = 4$ ، $D(3) = 2$
 بيان الدالة $D = \{(0, 5), (1, 4), (3, 2)\}$
 مدى الدالة $D = \{2, 4, 5\}$



دوالٌ كثيرات الحدود

فكر وناقش

في الدوال

$$د: ح \leftarrow ح, د (س) = ٥$$

$$ر: ح \leftarrow ح, ر (س) = ٣س - ٨$$

$$و: ح \leftarrow ح, و (س) = ٤س^٢ - ٥س + ٨$$

نلاحظ أن:

١ المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

٢ قاعدة الدالة (صورة س) هي حد أو مقدار جبري.

٣ ما قوة المتغير س في الدوال السابقة؟

تعريف

الدالة د: ح $\leftarrow$ ح حيث:

د (س) = $ا١س + ا٢س + ... + انس$ حيث $ا١, ا٢, ..., ان \in ح$
 $ن \in ط, ان \neq ٠$, تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة ن.

ونكون: درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة.



١ أي من الدوال التالية تمثل كثيرة حدود:

أ د (س) = $٣س^٢ + ٣س + ٣$ ب د (س) = $٣س^٢ + \frac{١}{س} + ٧$

ج د (س) = $٨س^٧ + \sqrt{٣س}$ د د (س) = $(س + \frac{١}{س} - ٢)$

٢ إذا كانت د: ح $\leftarrow$ ح فاذكر درجة الدالة في كل حالة:

أ د (س) = $٣ - ٢س$ ب د (س) = $(س - ٢س^٢) - (٣س - ٢)$

ج د (س) = $(س - ٢س^٢) (٣س - ٢)$ د د (س) = $(س - ٢س^٢) (٣س - ٢)$

مثال ١

إذا كان د(س) = س^٣ - س + ٣ أوجد: د(٢-)، د(٠)، د(√٣٧)

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د(س)} = \text{س}^3 - \text{س} + 3 & \therefore \text{د(٢-)} = (٢-)^3 - (٢-) + 3 = ٩ \\ \text{د(٠)} = ٣، \text{د(}\sqrt{٣٧}\text{)} & = (\sqrt{٣٧})^3 - \sqrt{٣٧} + 3 = \sqrt{٣٧} - ٦ + 3 = \sqrt{٣٧} - ٣ \end{aligned}$$

تدرب

إذا كانت: د(س) = س^٣ - س + ٣ ر(س) = س - ٣
 أوجد: د(√٣٧) + ر(√٣٧) **أ** أثبت د(٣) = ر(٣) = صفر **ب**

الدالة الخطية

تعريف

الدالة د: $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$ حيث د(س) = أس + ب، أ، ب $\in \mathbb{C}$ ، أ $\neq ٠$ تسمى هذه الدالة دالة خطية، أو دالة من الدرجة الأولى.

التمثيل البياني للدالة الخطية:

مثال ٢

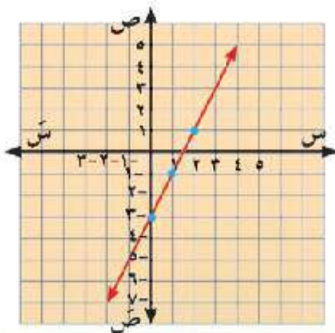
مثل بيانياً الدالة د: $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$ ، د(س) = س^٢ - س - ٣

الحل

$\therefore \text{د(س)} = \text{س}^2 - \text{س} - 3$
 $\therefore \text{د(٠)} = ٣ - ٠ - ٣ = ٠$ ، $\text{د(١)} = ١ - ١ - ٣ = -٣$ ، $\text{د(٢)} = ٤ - ٢ - ٣ = -١$
 يمكن وضع هذه الأزواج المرتبة داخل جدول كالآتي:

س	٠	١	٢
ص = د(س)	٣-	١-	١

وتمثل الأزواج المرتبة على الشبكة التربيعية لحاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$



ملاحظات:

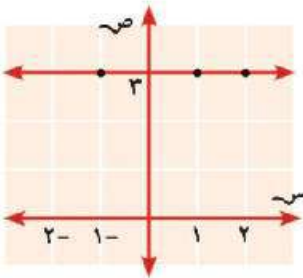
١) يكفي بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ، و يفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة التمثيل البياني للدالة.

٢) إذا كانت د : $E \leftarrow E$ ، د (س) = A س ، حيث $A \neq 0$ فإنه يمثلها بيانياً مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠).



مثّل بيانياً كل من الدوال الآتية:

١) د : د (س) = $2 + س$ ٢) ر : ر (س) = $3 = س$ ٣) ق : ق (س) = $2 - س$



حالة خاصة: إذا كانت د : $E \leftarrow E$ ، د (س) = B حيث $B \in E$

فإن د تُسمى دالة ثابتة.

فمثلاً: د (س) = ٣ وتكتب $3 = ص$

تمثل بمستقيم يوازي محور السينات.

٢	١	١-	س
٣	٣	٣	ص = د (س)



مثل الدوال التالية بيانياً

١) د (س) = ٥ ٢) د (س) = -4 ٣) د (س) = ٠ ٤) د (س) = $\frac{1}{2} س$

الدالة التربيعية

الدالة د : $E \leftarrow E$ حيث د (س) = $أس^٢ + ب س + ج$ ، أ، ب، ج أعداد حقيقية، $A \neq 0$ تُسمى دالة تربيعية. وهي دالة من الدرجة الثانية.

التمثيل البياني للدالة التربيعية.

مثال ٣

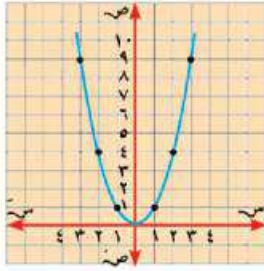


مثل بيانياً الدالة التربيعية د ، حيث د (س) = $س^٢$ ، س $\in E$ متخذاً $s \in [-٣, ٣]$

الحل

نعين بعض الأزواج المرتبة (س، د (س)) التي تنتمي إلى بيان الدالة د حيث س $\in E$ وأن الفترة $[-٣, ٣]$ تعطي بعض القيم الممكنة للمتغير س.

د (٣) = ٩ ، د (٢) = ٤ ، د (١) = ١ ، د (٠) = ٠ ، د (١) = ١ ، د (٢) = ٤ ، د (٣) = ٩



نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:

س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نعين في المستوى الديكارتي النقاط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة. ثم نرسم منحنياً ممهداً يمر بهذه النقاط.

لاحظ أن:

- ١ منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل $s = 0$.
- ٢ إحداثي رأس المنحنى $(0, 0)$ والقيمة الصغرى للدالة $= 0$.

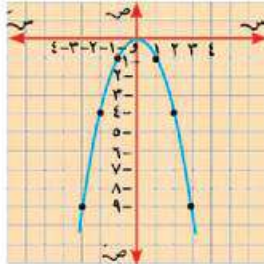
بصفه عامه الداله د (س) = |س| + ب س + ج، ا، ب، ج أعداد

حقيقيه، ا ≠ صفر يكون لها الخصائص الآتيه:

- ١ إحداثيات نقطة رأس المنحنى $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$
- ٢ منحنى الداله يكون مفتوح إلى أعلى $\cup$ عندما يكون معامل س موجباً ($a < 0$ صفر) وفي هذه الحالة يكون للدالة قيمة صغرى تساوي د $(-\frac{b}{2a})$
- ٣ منحنى الداله يكون مفتوح إلى أسفل $\cap$ عندما يكون معامل س سالباً ($a > 0$ صفر) وفي هذه الحالة يكون للداله قيمه عظمى تساوي د $(-\frac{b}{2a})$
- ٤ منحنى الداله د (س) يكون متماثلاً حول الخط الرأسي المار بنقطة رأس المنحنى وتكون معادلة هذا الخط $s = -\frac{b}{2a}$ ويسمى هذا الخط محور تماثل الداله.

مثال ٤

مثل بياناً الدالة التربيعية د حيث: د (س) = -س^٢، س ∈ ح متخذاً س ∈ [-٣، ٣]



الحل

نكرر نفس خطوات الحل السابقة:

س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

ومن الرسم نلاحظ أن:

- ١ منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل $s = 0$.
- ٢ إحداثي رأس المنحنى $(0, 0)$ والقيمة العظمى للدالة $= 0$.

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب
والتغير الطردى والتغير العكسى

الجبر

هل تعلم؟

أن وزن الجسم على سطح القمر يساوى $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض
تصور أنك ذهبت فى رحلة للقمر! كم سيصبح وزنك؟



النسبة



فكر وناقش

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هي: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{4}{3}$



وعموماً إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن النسبة

بين العدد أ والعدد ب

تكتب بإحدى الصور: أ إلى ب أو أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة، ويسمى ب تالي النسبة، ويسمى أ، ب معاً بحدى النسبة.

أكمل وأجب عن الأسئلة:

١ هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها في مقدار ثابت لا يساوى

الصفء؟

$$\frac{... \times 3}{... \times 5} = \frac{3}{5}$$

٢ هل تتغير النسبة إذا أضفنا عدداً حقيقياً لكل من حديها؟

$$\frac{... + 2}{... + 3} = \frac{2}{3}$$

٣ إذا كان $\frac{3}{5} = \frac{1}{ب}$ ، هل $3 = 1$ ، ب = ٥ لجميع قيم أ، ب؟



سوف تتعلم

☆ مفهوم النسبة.

☆ خواص النسبة.

المصطلحات الأساسية

☆ مقدم النسبة.

☆ تالي النسبة.

☆ حدًا النسبة.

مثال (١)



أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{7 + \text{س}}{11 + \text{س}} \quad \therefore \frac{2}{3} = \frac{7 + \text{س}}{11 + \text{س}}$$

$$\therefore 2(11 + \text{س}) = 3(7 + \text{س}) \quad \therefore 22 + 2\text{س} = 21 + 3\text{س}$$

$$\therefore 1 = \text{س}$$

مثال (٢)



أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ : ٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل علي النسبة ٣ : ٢

الحل

نفرض ان العدد المطلوب = س حيث س $\in$ ح. $\therefore$ مربعه = س^2

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{29 + \text{س}^2}{46 - \text{س}^2}$$

$$\therefore 2(46 - \text{س}^2) = 3(29 + \text{س}^2)$$

$$\therefore 92 - 2\text{س}^2 = 87 + 3\text{س}^2 \quad \therefore 5 = 5\text{س}^2$$

$$\therefore 16 = \text{س}^2 \quad \therefore 4 = \text{س}$$

التناسب



إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، ج، د كميات متناسبة، وإذا كانت الكميات أ، ب، ج، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

في التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

فإن أ يسمى (الأول المتناسب)، ب يسمى (الثاني المتناسب)، ج يسمى (الثالث المتناسب)، د يسمى (الرابع المتناسب).
كما يسمى أ، د طرفي التناسب، ب، ج وسطى التناسب.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن:

$$① \quad أ = م \cdot ج ، ب = م \cdot د \quad \text{حيث } م \neq 0$$

$$② \quad أ د = ب ج \quad (\text{حاصل ضرب الطرفين} = \text{حاصل ضرب الوسطين})$$

$$③ \quad \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عديدة من عندك

ثانياً: إذا كان: أ د = ب ج فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ ، $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{ج}$ ،

تحقق من الخواص بالمثل العددي الآتي:

تعلم أن: $١٦ \times ٢ = ٨ \times ٤$

$$\frac{١٦}{٨} = \frac{٤}{٢} ، \quad \frac{١٦}{٤} = \frac{٨}{٢} \quad \text{فإن:}$$

سوف نتعلم

- ☆ مفهوم التناسب
- ☆ خواص التناسب
- ☆ التناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- ☆ تناسب
- ☆ أول متناسب
- ☆ ثاني متناسب
- ☆ ثالث متناسب
- ☆ رابع متناسب
- ☆ طرفا التناسب
- ☆ وسطا التناسب

مثال ١

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة: $\frac{س+٢}{ص-٦}$

الحل

نفرض أن $س = ٢م$ ، $ص = ٣م$ (حيث $م$ ثابت $\neq$ صفر)

$$\therefore \frac{س+٢}{ص-٦} = \frac{٢م+٢}{٣م-٦} = \frac{٢ \times ١٢ + ٢ \times ٣}{٣ \times ١٢ - ٢ \times ٦} = \frac{٣٠}{٣٠} = ١$$

حل آخر:

بقسمة كل من البسط والمقام على $ص$ ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$$\therefore \frac{س+٢}{ص-٦} = \frac{\frac{س}{ص} + \frac{٢}{ص}}{١ - \frac{٦}{ص}} = \frac{\frac{س}{ص} + \frac{٢}{٣}}{\frac{٣-٦}{٣}} = \frac{\frac{س}{ص} + \frac{٢}{٣}}{\frac{٣-٦}{٣}} \leftarrow \text{أكمل}$$

مثال ٢

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب $س$

$$\frac{١٦}{س} = \frac{٤}{١٢}$$

[حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين] $١٦ \times ١٢ = س \times ٤$

$$\therefore س = \frac{١٦ \times ١٢}{٤} = ٤٨ \quad \therefore \text{الرابع المتناسب} = ٤٨$$

مثال ٣

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد $س$ فتكون الأعداد $س+٣$ ، $س+٥$ ، $س+٨$ ، $س+١٢$ متناسبة

$$\therefore \frac{س+٣}{س+٥} = \frac{س+٨}{س+١٢} \quad \therefore (س+٣)(س+١٢) = (س+٨)(س+٥)$$

$$\therefore ٣٦ + ١٢س + ٣ + س = ٤٠ + ١٣س + ٤٠ + ٥س \quad \therefore ٣٦ - ٤٠ = ١٥س - ١٣س$$

$$\therefore ٢ = س$$



١ أوجد الثاني المتناسب للأعداد ٢، ٤، ٦، ٨

ب أوجد الثالث المتناسب للأعداد ٦، ٨، ١٢، ١٤

٢ إذا كان $\frac{1}{b} = \frac{2}{5}$ فأوجد قيمة $17 + 9 + b : 4 + 2 + b$

ثالثاً: إذا كان $\frac{1}{b} = \frac{2}{5} = \frac{3}{d} = \frac{4}{h} = \frac{5}{m} = \frac{6}{n} = \frac{7}{o} = \frac{8}{p} = \frac{9}{q} = \frac{10}{r} = \frac{11}{s} = \frac{12}{t} = \frac{13}{u} = \frac{14}{v} = \frac{15}{w} = \frac{16}{x} = \frac{17}{y} = \frac{18}{z} = \frac{19}{\dots} = \frac{20}{\dots}$ $\Rightarrow$ ح *

فإن: $\frac{1}{b} = \frac{2}{5} = \frac{3}{d} = \frac{4}{h} = \frac{5}{m} = \frac{6}{n} = \frac{7}{o} = \frac{8}{p} = \frac{9}{q} = \frac{10}{r} = \frac{11}{s} = \frac{12}{t} = \frac{13}{u} = \frac{14}{v} = \frac{15}{w} = \frac{16}{x} = \frac{17}{y} = \frac{18}{z} = \frac{19}{\dots} = \frac{20}{\dots}$ إحدى النسب

فمثلاً: إذا كان: $\frac{1}{b} = \frac{2}{5} = \frac{3}{d} = \frac{4}{h} = \frac{5}{m} = \frac{6}{n} = \frac{7}{o} = \frac{8}{p} = \frac{9}{q} = \frac{10}{r} = \frac{11}{s} = \frac{12}{t} = \frac{13}{u} = \frac{14}{v} = \frac{15}{w} = \frac{16}{x} = \frac{17}{y} = \frac{18}{z} = \frac{19}{\dots} = \frac{20}{\dots}$ وحدي النسبة الثانية في -٥ وحدي النسبة

الثالثة في ٣ $\therefore \frac{1}{b} = \frac{2}{5} = \frac{3}{d} = \frac{4}{h} = \frac{5}{m} = \frac{6}{n} = \frac{7}{o} = \frac{8}{p} = \frac{9}{q} = \frac{10}{r} = \frac{11}{s} = \frac{12}{t} = \frac{13}{u} = \frac{14}{v} = \frac{15}{w} = \frac{16}{x} = \frac{17}{y} = \frac{18}{z} = \frac{19}{\dots} = \frac{20}{\dots}$ إحدى النسب

أي أن: $\frac{1}{b} = \frac{2}{5} = \frac{3}{d} = \frac{4}{h} = \frac{5}{m} = \frac{6}{n} = \frac{7}{o} = \frac{8}{p} = \frac{9}{q} = \frac{10}{r} = \frac{11}{s} = \frac{12}{t} = \frac{13}{u} = \frac{14}{v} = \frac{15}{w} = \frac{16}{x} = \frac{17}{y} = \frac{18}{z} = \frac{19}{\dots} = \frac{20}{\dots}$ إحدى النسب



إذا كانت: أ، ب، ج، د كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

الحل

$\therefore$ إذا كانت: أ، ب، ج، د كميات متناسبة $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

بضرب حدي النسبة الأولى في ٥ والثانية في ٣ **فإن** مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

(١) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ إحدى النسب

بضرب حدي النسبة الأولى في ٣ والثانية في ٥ **فإن** مجموع المقدمات: مجموع التوالى = إحدى النسب.

(٢) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ إحدى النسب

من (١)، (٢) $\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

(وهو المطلوب إثباته)

$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

افرض $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = م$ حيث م مقدار ثابت
 $أ = ب م$ ، $ج = د م$ وعوض في كلا الطرفين.



إذا كان $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د}$ فأثبت أن:

أولاً: $\frac{أ+ب}{د} = \frac{ج+د}{د}$ **ثانياً:** $\frac{أ-ب}{د} = \frac{ج-د}{د}$

إرشاد: افرض أن $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = م$ حيث م مقدار ثابت $0 \neq$ وأكمل
 أو بأى طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

- ٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{٢}{٦}$ ، $\frac{٦}{١٨}$
 ١ هل توجد علاقة بين (٦) وحاصل الضرب ٢×١٨ ؟
 ٢ إذا استبدل العدد ٦ بالعدد $(٦-)$ هل توجد علاقة بين $(٦-)$ وحاصل الضرب ٢×١٨ ؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، ج: إنها فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{ب}{ج} = \frac{أ}{ب}$
 يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، ج بالثالث المتناسب
 حيث: $ب^2 = أ ج$ أو $ب = \sqrt{أ ج}$

مثال ٥

أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل

$$\text{الوسط المتناسب} = \sqrt{3 \times 27} = 9$$

مثال ٦

إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ، ج، **فأثبت أن:** $\frac{1}{ج} = \frac{أ + ب^2}{ب^2 + ج^2}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، ج

$$\text{نفرض } \frac{ب}{ج} = \frac{أ}{ب} = م$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{أ + ب^2}{ب^2 + ج^2} = \frac{ج^2 م + ج^2 م^2}{ج^2 + ج^2 م^2}$$

$$(1) \quad م = \frac{ج^2 م (1 + م)}{ج^2 (1 + م^2)} =$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{ج} = \frac{ج م}{ج^2}$$

$$\text{من (1)، (2) ينتج أن } \frac{1}{ج} = \frac{أ + ب^2}{ب^2 + ج^2}$$

أي أ، ب، ج في تناسب متسلسل

$$\therefore ب = ج م، أ = ب م = ج م^2 \times م = ج م^3$$

حل آخر:

$${}^2_2\text{م} = \frac{{}^2_2\text{ب}}{{}^2_2\text{ج}} = \frac{{}^2_2\text{ا}}{{}^2_2\text{ب}}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{{}^2_1 + {}^2_1}{{}^2_1 + {}^2_1} = {}^2_2$$

$$م^2 = \frac{1}{\frac{ب}{ج}} = \frac{ب}{ج} \times \frac{1}{\frac{ب}{ج}} = \frac{1}{\frac{ب}{ج}}$$

من (١)، (٢)



١ - إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{1}{ص}$ في تناسب متسلسل

فإن : س^٢ص =

٢- الوسط المناسب للكميتين ٩س^٢ - ٢٥ص^٢ ، ٣س + ٥ص هو

۳۴ س - ۵ ص

الحل

١- $\frac{1}{ص}$ ، ٧ ، $ص$ ، في تناسب متسلسل فإن $\frac{٧}{ص} = \frac{ص}{ص}$

$V = \text{مس}^2 \text{ص}$

٢- ∴ ٩ ص٢ - ٢٥ ص٢، م، ٣ ص٥ + ٥ ص٣ في تناسب متسلسل

حيث م الوسط المتناسب

$$\therefore \frac{9\text{ ص}^2 - 25\text{ ص}^2}{3\text{ ص} + 5\text{ ص}} = \frac{م(3\text{ ص} - 5\text{ ص})}{3\text{ ص} + 5\text{ ص}} \therefore م = (3\text{ ص} + 5\text{ ص})$$

$$m = \pm (3s + 5v)$$

التغير الطردى و التغير العكسى



أولاً: التغير الطردى

فكر وناقش (١)



تتحرك سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث
فإذا كانت المسافة المقطوعة **ف** بالمتر فى زمن
قدره **ن** ثانية تعطى بالعلاقة: **ف = ع ن**.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

١ مثل العلاقة بين **ف**، **ن** بيانياً.

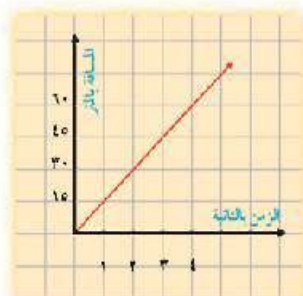
ب هل التمثيل البياني يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)؟

ج أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقداراً ثابتاً وهو ١٥

أى: **ف = ١٥ ن** ويقال حينئذ إن **ف** تتغير طردياً
بتغير **ن** وتكتب رمزياً **ف ∝ ن**.



سوف نتعلم

☆ مفهوم التغير الطردى

☆ مفهوم التغير العكسى

☆ كيفية التمييز بين التغير

الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

☆ تغير

☆ تغير طردى

☆ تغير عكسى

تعريف:

يقال: إن **ص** تتغير طردياً مع **س** وتكتب **ص ∝ س** إذا كانت **ص = م س**

(حيث **م** ثابت $≠ ٠$) وإذا أخذ المتغير **س** القيمتين **س_١**، **س_٢** وأخذ المتغير **ص**

القيمتين **ص_١**، **ص_٢** على الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

مما سبق نستنتج أن:

- ١ العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ويمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.
- ٢ إذا كانت ص ∞ س فإن ص = م س وكذلك إذا كانت ص = م س فإن ص ∞ س

مثال ١

إذا كانت ص ∞ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**
أولاً: العلاقة بين ص، س
ثانياً: قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل

أولاً: ∵ ص ∞ س ∴ ص = م س (حيث م ثابت ≠ ٠)
وبالتعويض عن قيمتي س، ص في العلاقة
∴ ١٤ = م × ٤٢ ∴ م = $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ ∴ العلاقة هي: ص = $\frac{1}{3}$ س
ثانياً: عندما س = ٦٠ ∴ ص = $\frac{1}{3} \times 60 = 20$
ملحظة: يمكن استخدام العلاقة $\frac{ص}{س} = \frac{١٤}{٤٢} = \frac{١}{٣}$ لإيجاد قيمة ص في المطلوب الثاني

ثانياً: التغير العكسي

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

- أ اكتب العلاقة بين كل من م، س، ص.
- ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوي ٣٠ سم^٢ **فأكمل** الجدول الآتي:

س	٣	٥	٦	١٠
ص				

ج **أوجد** س ص في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠ ∴ أي أن: ص = $\frac{30}{س}$ ∴ أي أن ص تتغير عكسياً بتغير س وتكتب رمزياً ص ∞ $\frac{1}{س}$
وبالمثل: س = $\frac{30}{ص}$ ∴ أي أن: س تتغير عكسياً بتغير ص وتكتب رمزياً س ∞ $\frac{1}{ص}$

تعريف:

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ إذا كانت س ص = م (حيث م ثابت $\neq 0$)
وإذا أخذ المتغير س القيمتين س_١، س_٢ وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين ص_١، ص_٢ على
الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

مما سبق نستنتج أن:

- ١ العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ولا يمثلها خط مستقيم.
- ٢ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س فإن: $ص = \frac{م}{س}$ (حيث م ثابت $\neq 0$)
وكذلك إذا كانت ص = $\frac{م}{س}$ فإن ص $\propto \frac{1}{س}$.

مثال ٢

إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢
أولاً: أوجد العلاقة بين س، ص. ثانياً: أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥.

الحل

$$\because ص \propto \frac{1}{س} \quad \therefore ص = \frac{م}{س} \quad (\text{حيث م ثابت } \neq 0)$$

وبالتعويض عن قيمتي س، ص في العلاقة

$$\therefore \frac{٣}{٢} = \frac{م}{٢} \quad \therefore م = ٣ \times ٢ = ٦$$

$\therefore$ العلاقة هي: $ص = \frac{٦}{س}$

$$\therefore ص = \frac{٦}{١,٥} = ٤ \quad \text{عندما س} = ١,٥$$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة ص من العلاقة $ص = \frac{٦}{س}$ $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$



بين أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب فى كل حالة:

ص	س
٦	٣
٩-	٢-
١	١٨-
٢-	٩

ص	س
٩	٥
١٨	١٠
٢٧	١٥
٤٥	٢٥

ص	س
٩	٢
١٨	٤
٥٤	١٢
٧٢	١٦

ص	س
٢٠	٣
١٢	٥
١٥	٤
١٠	٦

مثال ٣

الربط بالفيزياء: إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هي $ع = ٩,٨ ن$ أولاً: حدد نوع التغير بين ع، ن.

ثانياً: أ) اوجد قيم ع عندما $ن = ٢$ ثانية، $ن = ٤$ ثوانٍ

ب) اوجد قيمة ن عندما $ع = ٢٤,٥$ متر/ث

الحل

أولاً: $ع = ثابت \times ن$ أى ع متناسبة طرديًا بتغير ن.

تكون $ع = ٢ \times ٩,٨ = ١٩,٦$ متر/ث

تكون $ع = ٤ \times ٩,٨ = ٣٩,٢$ متر/ث

ب) عندما $ع = ٢٤,٥$ تكون $٢٤,٥ = ٩,٨ \times ن$ $\therefore ن = \frac{٢٤,٥}{٩,٨} = ٢,٥$ ثانية.

مثال ٤

الربط بالهندسة: إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان $ع = ٢٧$ سم عندما $نق = ١٠,٥$ سم؛ فاوجد (ع) عندما $نق = ١٥,٧٥$ سم.

الحل



$$\therefore \text{ع} = \text{م} \times \frac{1}{\text{نق}} \quad (\text{حيث م ثابت} \neq 0)$$

$$\therefore \text{ع} \propto \frac{1}{\text{نق}}$$

$$\text{ع} = 27 \text{ عند نق} = 10,5$$

$$\therefore \text{م} = 27 \times \frac{1}{(10,5)^2} \quad (1)$$

$$\therefore \text{م} = 27 \times \frac{1}{(10,5)^2}$$

$$\therefore \text{ع} = 27 \times \frac{1}{(10,5)^2} \times (10,5)^2 \quad (1) \text{ من}$$

وبالتعويض

$$\text{وعندما نق} = 15,75 \text{ سم} \quad \therefore \text{ع} = 27 \times \frac{1}{(10,5)^2} \times (15,75)^2 = 12 \text{ سم}$$

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلي:

$$27 \times 10.5^2 \div 15.75^2 =$$

مثال (5)



الربط مع الكيمياء : إذا كانت العلاقة بين كل من الكثافة (ث) والكتلة (ك) والحجم (ح) هي

$$\frac{\text{م}}{\text{ك}} = \text{ث} \quad (\text{حيث م ثابت} \neq 0)$$

أولاً : حدد نوع التغير بين ث ، ك ونوع التغير بين ث ، ح

ثانياً : أوجد قيمة م إذا كان ث = 6 جم / سم³ ، ك = 30 جم ، ح = 7 سم³

ثالثاً : أوجد قيمة ح إذا كان ك = 4,5 كجم ، ث = 9 كجم / م³

الحل

أولاً : الكثافة (ث) تتناسب طردياً مع الكتلة (ك) ، تتناسب عكسياً مع الحجم (ح)

$$\text{ثانياً : } \frac{\text{م}}{\text{ك}} = \text{ث} \leftarrow \frac{\text{م}}{7} = 6 \leftarrow \frac{\text{م}}{30} = \frac{42}{5}$$

$$\text{ثالثاً : وعندما ك} = 4,5 \text{ كجم ، ث} = 9 \text{ كجم / م}^3 \quad \therefore \frac{4,5 \times 7}{\text{ح}} = 9$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{4,5 \times 7}{9} = 0,7 \text{ م}^3$$

الوحدة الثالثة : الإحصاء

الإحصاء



مطعم للمثلجات يقدم أنواعًا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين. ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.



جمع البيانات

فكر وناقش

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمي صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائي واتخاذ القرارات المناسبة.

١ ما مصادر جمع البيانات؟ ٢ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

١ مصادر أولية (مصادر ميدانية):

وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأي) ويتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.



٢ مصادر ثانوية (مصادر تاريخية):

وهي المصادر التي يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

ويتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف وحجم المجتمع الإحصائي محل البحث. ويعرف المجتمع الإحصائي بأنه جميع المفردات التي يجمعها خصائص عامة واحدة.



سوف نتعلم

- ☆ أنواع مصادر جمع البيانات.
- ☆ أساليب جمع البيانات.
- ☆ كيفية اختيار عينة.
- ☆ أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

- ☆ مصادر أولية.
- ☆ مصادر ثانوية.
- ☆ أسلوب الحصر الشامل.
- ☆ أسلوب العينات.
- ☆ اختيار متحيز.
- ☆ اختيار عشوائي.
- ☆ عينة.
- ☆ عينة عشوائية.
- ☆ عينة طبقية.



فمثلاً: تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعاً إحصائياً تكون مفردته التلميذ .

أولاً: أسلوب الحصر الشامل :



ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائي، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج. ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة.

ثانياً: أسلوب العينات :

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائي الذي تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات :

- ١ توفير الوقت والجهد والتكاليف.
 - ٢ الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع الأسماك مثلاً).
 - ٣ الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة في بعض الأحيان مثل:
 - أ فحص دم مريض من خلال عينة (لأن فحص الدم كله يؤدي إلى الوفاة).
 - ب فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربائية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح.
- (معرفة العمر الزمني للمصباح الكهربائي يقتضي إشعاله حتى احتراقه).



ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيداً (صادقاً)، وتسمى بالعينة المتحيزة.

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها في العينة :

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)



وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما في مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار في ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولا يعتبر هذا الاختيار عشوائياً.

ثانياً: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

١ العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

أ إذا كان حجم المجتمع صغيراً:



عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل ٤٠ تلميذاً فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ يكتب عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة، ثم توضع فى صندوق، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائياً، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق. وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

ب إذا كان حجم المجتمع كبيراً:



بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥ تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ، فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملية شاقة؛ فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج EXCEL) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩، ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ **كما يلي :**



ومع تكرار الضغط على مفتاح **=** تتوالى ظهور الأرقام ونكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

٢ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس؛ أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعاً للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، ويختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.



مثال: عند دراسة المستوى التعليمى لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصاً؛ فلابد أن نختار ٣٠ شخصاً من طبقة الذكور، ٢٠ شخصاً من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.



مصنع به ٥٠٠ عامل ويريد المسئولون عن المصنع معرفة آراء العاملين فى نظام ساعات الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع. وضع كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة

الحل

∴ عدد العاملين بالمصنع = ٥٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $٥٠٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٥٠$ عاملاً

أى أننا نريد اختيار ٥٠ عاملاً لإجراء هذا الاستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كما يلى :

١- يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقماً من ١ إلى ٥٠٠

٢- تستخدم الآلة الحاسبة العلمية لاختيار ٥٠ رقماً بالطريقة السابق ذكرها والتي تنحصر بين ١ ، ٥٠٠

والأرقام العشوائية التى تظهر اكبر من ٥٠٠ يتم استبعادها.

ناقش معلمك فى الحل



التشتت

فكر وناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنول) وأمكنك حسابها لأي مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات في التمرکز حول هذه القيمة.



فإذا كان الأجر الأسبوعي بالجنیهات لمجموعتين من العمال أ، ب في أحد المصانع كما يلي:

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠
مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

١ أوجد الوسط الحسابي لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

٢ قارن بين أجور المجموعتين أ، ب. ماذا تستنتج؟

$$\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}} = \text{الوسط الحسابي}$$

تعلم أن:

فيكون:

$$\frac{٢٤٠ + ٢٣٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٧٠}{٥} = \text{الوسط الحسابي لأجور المجموعة أ} = ١٠٠٠$$

$$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

$$\frac{٤٠٠ + ١٩٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٥٠}{٥} = \text{الوسط الحسابي لأجور المجموعة ب} = ١٠٠٠$$

$$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

١ الوسط الحسابي لأجور المجموعة أ = الوسط الحسابي لأجور المجموعة ب

$$= ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

٢ الأجر الوسيط = الأجر المنوال = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

سوف تتعلم

☆ مقاييس التشتت

(المدى - الانحراف

المعياري)

مصطلحات أساسية

☆ نزعة مركزية.

☆ وسط حسابي.

☆ تشتت.

☆ مدى.

☆ انحراف معياري.

وبالذات أن:

- (١) مجموعتي الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقياس النزعة المركزية.
 (٢) أجور **المجموعة أ** متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهاً، بينما أجور **المجموعة ب** متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٥٠، ٤٠٠ جنية.

أي أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتاً من أجور المجموعة أ.

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضهما.

التشتت: لأي مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيراً (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.

أي إن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر للتشتت لكل مجموعة.

مقاييس التشتت**١ المدى : (أبسط مقاييس التشتت)**

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها في المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = $60 - 51 = 9$

مدى المجموعة الثانية = $92 - 42 = 50$

وعلى هذا نعتبر المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى.

لاحظ أن:

(١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

(٢) يتأثر المدى تأثراً كبيراً بالقيم المتطرفة.

فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تشتت في مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢)

منها فإن المدى = $52 - 42 = 10$ أي $\frac{1}{9}$ المدى السابق حسابه.

(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى، فقد لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٢ الانحراف المعياري:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو "الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى".
أى أن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

الانحراف المعياري

حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعياري لمجتمع البيانات.
 $\bar{s}$ (سين بار) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.
 n إلى عدد المفردات.
 $\sum$ إلى عملية الجمع.

أولاً: حساب الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات :

مثال

احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ٢١

الحل

لحساب الانحراف المعياري نكوّن الجدول المقابل حيث:

الوسط الحسابى $\bar{s} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

$$\therefore \bar{s} = \frac{\sum s}{n}$$

$$\bar{s} = \frac{12 + 13 + 16 + 18 + 21}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{54}{5}} = \sqrt{10.8} \approx 3.286$$

س	س - $\bar{s}$	(س - $\bar{s}$) ^٢
١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
المجموع	٨٠	٥٤

ثانيًا: حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري:

لأي توزيع تكراري، يكون:

$$\frac{\sum (s - \bar{s})^2 \cdot k}{\sum k} = \sigma^2$$

الانحراف المعياري σ

حيث: s تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، k تكرار القيمة أو المجموعةمجموع التكرارات ، $\bar{s} = \frac{\sum s \cdot k}{\sum k}$ الوسط الحسابي

مثال ١

فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق في الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة.

الحل

باعتبار عدد الوحدات التالفة (s) وعدد الصناديق المناظر لها (k)
لحساب الانحراف المعياري للوحدات التالفة نكوّن الجدول التالي:

ويكون:

عدد الوحدات التالفة (s)	عدد الصناديق (k)	$s \times k$	$s - \bar{s}$	$(s - \bar{s})^2$	$(s - \bar{s})^2 \cdot k$
صفر	٣	صفر	-٣	٩	٢٧
١	١٦	١٦	-٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	-١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

الوسط الحسابي $\bar{s}$

$$\bar{s} = \frac{\sum s \times k}{\sum k}$$

$$3 = \frac{300}{100}$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2 \cdot k}{\sum k}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{204}{100}} \approx 1,428 \text{ وحدة}$$

مثال ٢



التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

الحل

١ نوجد مراكز المجموعات s

فيكون: مركز المجموعة الأولى $= \frac{٤+٠}{٢} = ٢$

مركز المجموعة الثانية $= \frac{٨+٤}{٢} = ٦$

وهكذا ونسجلها فى العمود الثالث.

٢ نضرب مراكز المجموعات $\times$ التكرارات المناظرة لها: أي $s \times K$ ونسجلها فى العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\bar{s} = \frac{\text{مجموع } K}{\text{مجموع } s}$

٣ نوجد انحراف مركز كل مجموعة (s) عن الوسط الحسابي: أي نوجد $(s - \bar{s})$

٤ نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط الحسابي: أي $(s - \bar{s})^2$

٥ نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابي $\times$ تكرار هذه المجموعة:

أي $(s - \bar{s})^2 \times K$

٦ نحسب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجموع } (s - \bar{s})^2 \times K}{\text{مجموع } K}}$

فيكون:

المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	س - س	(س - س)²	(س - س)² × ك
-٠	٢	٢	٤	١٠,٦-	١١٢,٣٦	٢٢٤,٧٢
-٤	٥	٦	٣٠	٦,٦-	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
-٨	٨	١٠	٨٠	٢,٦-	٦,٧٦	٥٤,٠٨
-١٢	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
٢٠-١٦	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
المجموع	٤٠		٥٠٤			٨١٧,٦

$$\text{الوسط الحسابي } \bar{س} = \frac{٥٠٤}{٤٠} = ١٢,٦$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{٨١٧,٦}{٤٠}} = \sqrt{٢٠,٤٤٧} \approx ٤,٥٢ \text{ درجة}$$

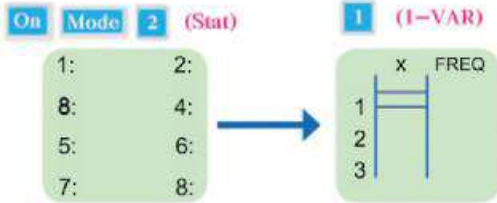
يمكن استخدام حاسبة الجيب [F_x-82ES, F_x-83ES, F_x-85ES, F_x-300ES, F_x-350ES] في التحقق من صحة حساب الانحراف المعياري.

أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائي

والاستعداد لإدخال البيانات

ثانياً: حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري (مثال ٢)

١) ندخل مراكز المجموعات ١٨, ١٤, ١٠, ٦, ٢



On Mode 2 (Stat) 1 (1-VAR)
2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =

X	FREQ
4	14
5	18
6	

2 = 5 = 8 = 1 5 = 1 0 =

X	FREQ
4	14 15
5	18 10
6	

٢) الانتقال إلى بداية العمود الثاني (FREQ)

وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٥, ٢

١٠, ١٥, ٨

Shift 1 5 (VAR) 3 (Xσn) =

x	FREQ
4	18
5	10
6	0

4.521061822

٣ استدعاء الناتج (الانحراف المعياري)

فيكون $\sigma \approx 4,521$

٤ العودة للنظام الأصلي وإغلاق الحاسبة

لادنا أن:

- (١) يتأثر الانحراف المعياري بانحرافات جميع القيم، وبالتالي تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.
- (٢) الانحراف المعياري له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم في المقارنة بين تشتت المجموعات التي لها نفس وحدات القياس عند تساويها في الوسط الحسابي، وتكون المجموعة الأكبر في الانحراف المعياري هي الأكثر تشتتًا.

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

حساب
المثلثات



بالدرجات والدقائق
والثواني، وقد قام
البيرونى بعمل جداول
لجيوب الزوايا ثم استنتج
الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب
مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف
الغرب على ما صاغه علماء العرب
والمسلمون من خلال ترجمة كتب
الفلك العربية على يد العالم
الألماني يوهان مولر.

علم حساب المثلثات هو
أحد فروع الرياضيات
والذى يتناول دراسة
العلاقة بين أطوال أضلاع
المثلث وقياسات زواياه، وكان
قدماء المصريين هم أول من عملوا
بقواعد حساب المثلثات فى بناء
الأهرامات، وبناء معابدهم، وفى
دراسة الفلك، وفى حساب
المسافات الجغرافية، كما
قاس البابليون الزوايا

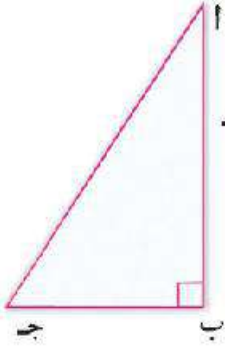
أبو الريحان البيرونى
عالم ولد فى خوارزم عام
٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

كتاب الطالب: الفصل الدراسي الأول

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

فكر وناقش

فى الشكل المقابل أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب،
أكمل باستخدام أحد الرموز (< أو > أو =)



١ إذا كان $\angle ق$ ($\angle ج$) < $\angle ق$ ($\angle ا$) فإن أ ب ب ج

٢ $\frac{أ ب}{أ ج} \dots \frac{أ ب}{أ ج}$ ٣ $\frac{أ ج}{ب ج} \dots \frac{أ ج}{ب ج}$

٤ $\frac{أ ب}{أ ج} \div \frac{أ ب}{أ ج} \dots \frac{أ ب}{أ ج} \div \frac{أ ب}{أ ج}$

٥ $\frac{أ ب}{أ ج} + \frac{أ ب}{أ ج} \dots \frac{أ ب}{أ ج} + \frac{أ ب}{أ ج}$

٦ $\frac{٢(أ ب)}{٢(أ ج)} + \frac{٢(أ ب)}{٢(أ ج)} \dots \frac{٢(أ ب)}{٢(أ ج)} + \frac{٢(أ ب)}{٢(أ ج)}$

القياس الستيني للزوايا

درسنا أن مجموع قياسات الزوايا
المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠° ، وإذا
قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع
متساوية فإن الربع الواحد يحتوى
على ٩٠° (زاوية قائمة)؛ والدرجة
هى وحدة القياس الستيني، كما
توجد أجزاء من الدرجة على النحو
التالى:

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

٣٥ درجة ، ٢٤ دقيقة ، ٤٢ ثانية تكتب

كالتالى: $٤٢^\circ ٢٤' ٣٥''$ ويمكن تحويل الدقائق والثواني إلى أجزاء

من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :

سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد النسب

المثلثية للزاوية الحادة

فى المثلث القائم الزاوية.

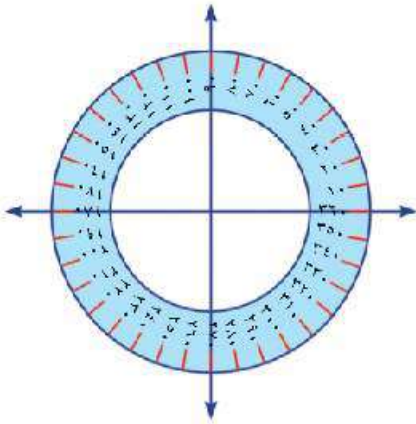
مصطلحات أساسية

☆ قياس ستيني.

☆ جيب زاوية.

☆ جيب تمام زاوية .

☆ ظل زاوية.





أولاً: نحول 24° إلى درجات $24 = \frac{24}{60} = 0,4^\circ$ ، ونحول $42'$ أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات:

$$42' = \frac{42}{60} = 0,7^\circ, \quad 0,7^\circ = \frac{0,7}{60} = 0,0116667^\circ$$

فيكون الناتج $42^\circ 24' 42'' = 0,0116667 + 0,4 + 35 = 35,4116667^\circ$

ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالي:

$$35 \text{ [ON/OFF]} 24 \text{ [ON/OFF]} 42 \text{ [ON/OFF]} \quad 35,4116667^\circ \text{ هو: الناتج}$$

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

فمثلاً: $54,36^\circ$ يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

$$54,36 \text{ [ON/OFF]} = \text{[ON/OFF]} \quad \text{فيكون الناتج: } 54^\circ 21' 36''$$



١ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:

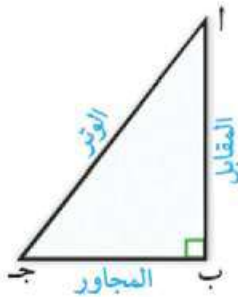
$$\text{أ } 76^\circ 16' \quad \text{ب } 45^\circ 3' 56'' \quad \text{ج } 8^\circ 38' 8'' \quad \text{د } 65^\circ 26' 43''$$

٢ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثواني.

$$\text{أ } 34,6^\circ \quad \text{ب } 78,08^\circ \quad \text{ج } 56,18^\circ \quad \text{د } 83,246^\circ$$

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة:

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب حيث أ، ج زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية ج يسمى بالمقابل، والضلع المجاور للزاوية ج يسمى بالمجاور، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وستتعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهي:

١ **جيب الزاوية:** ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية $\sin$.

٢ **جيب تمام الزاوية:** ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية $\cos$.

٣ **ظل الزاوية:** ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية $\tan$.

$\frac{أ ب}{أ ج}$	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	جا ح
$\frac{ب ج}{أ ج}$	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	جتا ح
$\frac{أ ب}{ب ج}$	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	ظا ح

مثال



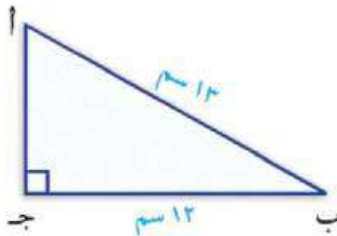
١ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج، أ ب = ١٣ سم، ب ج = ١٢ سم.

أ أوجد طول أ ج

ب أوجد كلاً من: جا، جتا، ظا، جاب، جتاب، ظاب

ج أثبت أن: جا أ جتاب + جتا أ جاب = ١

د أوجد: ١ + ظا^٢



الحل

١ ∴ Δ أ ب ج قائم الزاوية في ج ∴ (أ ب)^٢ = (ب ج)^٢ + (أ ج)^٢

$$∴ (أ ج) = \sqrt{(أ ب)^2 - (ب ج)^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$$

∴ أ ج = ٥ سم

ب جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا أ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاب أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتاب أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظاب أ = $\frac{٥}{١٢}$

ج الطرف الأيمن = جا أ جتاب + جتا أ جاب

$$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{١٢ \times ٥}{١٦٩} + \frac{٥ \times ١٢}{١٦٩} = \frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٢٥ + ١٤٤}{١٦٩} = \frac{١٦٩}{١٦٩} = ١$$

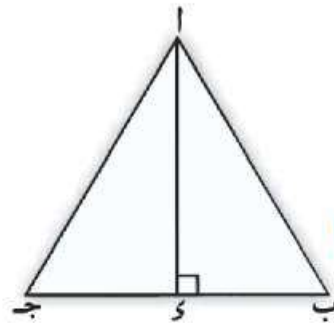
$$د ١ + ظا^2 = ١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^2 = ١ + \frac{١٤٤}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} + \frac{١٤٤}{٢٥} = \frac{١٦٩}{٢٥}$$

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

فكر وناقش

١ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٢، رسم $أ ي \perp ب ج$ أكمل:



(بدلالة ل)

١ $\angle ب = \dots^\circ$

٢ $\angle أ ب ي = \dots^\circ$

٣ $ب ي = \dots$ ، $أ ي = \dots$

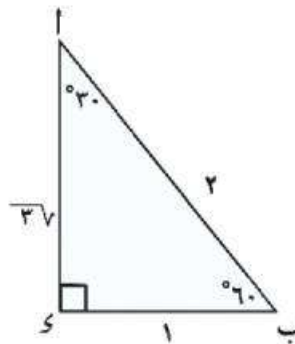
٤ $ب ي : أ ب : أ ي = \dots : \dots : \dots$

نلاحظ مما سبق :

أن $\Delta أ ب ي$ ثلاثيني ستيني، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

$ب ي : أ ب : أ ي = ١ : ٢ : \sqrt{3}$ وبالتالي يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالي :



جا $٣٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ب} = \frac{١}{٢}$ ، جتا $٣٠^\circ = \frac{أ ي}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{٢}$

ظا $٣٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ي} = \frac{١}{\sqrt{3}}$ ،

جا $٦٠^\circ = \frac{أ ي}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{٢}$ ،

جتا $٦٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ب} = \frac{١}{٢}$ ، ظا $٦٠^\circ = \frac{أ ي}{ب ي} = \sqrt{3}$

سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد النسب

المثلثية للزوايا.

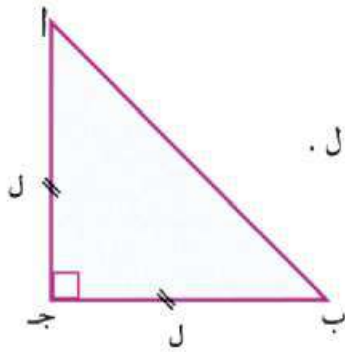
☆ $(٣٠^\circ, ٤٥^\circ, ٦٠^\circ)$

مصطلحات أساسية

☆ نسبة مثلثية.

☆ زاوية خاصة.

فكر وناقش



١ في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث متساوي الساقين، وقائم الزاوية في ج، وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

١ و (أ ب) = ، و (أ ج) = =

٢ $\therefore (أ ب)^2 = (أ ج)^2 + \dots\dots\dots$ ، $\therefore (أ ب)^2 = ل^2 + \dots\dots\dots$

$\therefore (أ ب)^2 = ل^2 + ل^2$ ، $\therefore (أ ب)^2 = ٢ل^2$

٣ أ ج : ب ج : أ ب = : :

نلاحظ مما سبق :

أن Δ أ ب ج فيه و (أ ب) = و (أ ج) = و (ب ج) = ٤٥° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث أ ج : ب ج : أ ب = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$ وبالتالي يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥° كالآتي :

جا ٤٥° = $\frac{أ ج}{أ ب} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{ب ج}{أ ب} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{أ ج}{ب ج} = ١$

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة في جدول كالآتي :

الزاوية النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

ملاحظات :

١ مما سبق نجد أن: (جيب) أى زاوية يساوى (جيب تمام) الزاوية المتممة لهذه الزاوية ، والعكس صحيح .

فمثلاً: جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٦٠° = جا ٣٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥°

٢ لأى زاوية أ يكون : ظا ١ = $\frac{\text{جا ١}}{\text{جتا ١}}$

مثال ١

أوجد قيمة كل من :

أ جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا ٣٠°

ب $\frac{\text{جتا ٦٠°} + \text{جتا ٣٠°} + \text{ظا ٤٥°}}{\text{جا ٦٠°} - \text{ظا ٦٠°} - \text{جا ٣٠°}}$

الحل

أ المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا ٣٠°

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

ب المقدار = $\frac{\text{جتا ٦٠°} + \text{جتا ٣٠°} + \text{ظا ٤٥°}}{\text{جا ٦٠°} - \text{ظا ٦٠°} - \text{جا ٣٠°}}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{2}{2}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1} = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



برهن على صحة كل مما يأتى:

أ جا ٣٠° = ٥ جتا ٦٠° - ظا ٤٥°

ب ظا ٦٠° - ظا ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا ٣٠°



مثال ٢

أوجد النسب المثلثية التالية :

جا ٤٣° ، جتا $٢٨^\circ ٥٣'$ ، ظا $٤٩^\circ ٣٧'$ ،
مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

ابداً $\rightarrow \sin ٤٣ =$ جا $٤٣^\circ \approx ٠,٦٨٢٠$
 ابداً $\rightarrow \cos ٥٣ \text{ } \text{ } ٢٨ \text{ } =$ جتا $٢٨^\circ ٥٣' \approx ٠,٥٩٥٣$
 ابداً $\rightarrow \tan ٦٤ \text{ } \text{ } ٣٧ \text{ } ٤٩ \text{ } =$ ظا $٤٩^\circ ٣٧' \approx ٢,١٠٨٩$

إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها :

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كانت الزاوية قياسها ٣٠° فإن جا $٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ وكذلك إذا

كانت الزاوية قياسها ٣٣° فإن جا $٣٣^\circ = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥$

$$\sin ٣٣ = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥$$

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

فمثلاً: إذا كان جا س $= ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥$ والمطلوب معرفة قيمة س .

فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:

ابداً $\rightarrow \text{SHIFT} \sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = ٣٣^\circ$

مثال ٣

أوجد $\angle$ (هـ) في كل مما يأتي :

جا هـ $= ٠,٦$ ، جتا هـ $= ٠,٦٢١٧$ ، ظا هـ $= ١,٠٨٢٣$

الحل

$$\sin 0,6 = 0,57$$

$$\therefore \angle \text{أ} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\therefore \angle \text{ب} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\cos 0,6217 = 0,78$$

$$\therefore \angle \text{ج} = 51^\circ 33' 30''$$

$$\therefore \angle \text{د} = 51^\circ 33' 30''$$

$$\tan 1,0823 = 1,75$$

$$\therefore \angle \text{هـ} = 47^\circ 15' 48''$$

$$\therefore \angle \text{و} = 47^\circ 15' 48''$$

الربط بالهندسة: مثال ٤ أب ج مثلث متساوي الساقين فيه أب = أج = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم .

أوجد :

أولاً: $\angle \text{ب}$

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.

الحل

نرسم $أد \perp ب ج$
 $\therefore$ المثلث أب ج متساوي الساقين .

 $\therefore$ د منتصف ب ج ويكون ب د = ج د = ٦ سم

$$\therefore \cos \angle \text{ب} = \frac{6}{8} = 0,75$$

وباستخدام الآلة الحاسبة :

$$\cos 0,75 = 51^\circ 33' 30''$$

$$\therefore \angle \text{ب} = 51^\circ 33' 30''$$

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد $أد$

$$\therefore (أد)^2 = (أب)^2 - (ب د)^2$$

$$\therefore (أد)^2 = 36 - 64 = 28$$

$$\therefore أد = \sqrt{28}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث أب ج} = \frac{1}{2} \times ب د \times أد = \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{28}$$

$$= 31,75 \text{ سم}^2$$

(وهو المطلوب ثانياً)

(وهو المطلوب أولاً)

(من نظرية فيثاغورث)

حل آخر للجزء الثاني:

$$\frac{اى}{ا} = \text{جاء} = \frac{اى}{8}$$

١

وبالتعويض من ١ في هذه العلاقة

$$\text{مساحة المثلث ا ب ج} = \frac{1}{2} \times ا \times ب \times ج = ا \times ا$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث ا ب ج} = \frac{1}{2} \times ا \times ا \times ا = ا \times ا \times ا = ٨ \times ٨ \times ٨ = ٥١٢ \text{ سم}^2$$

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالي:

ابداً $\rightarrow 1 \div 2 \times 12 \times 8 \sin 41 \times 24 \times 35 =$

مثال ٥

أوجد قيمة س التي تحقق س جا ٣٠ جتا ٤٥ = جا ٦٠

الحل

$$\therefore \text{س جا } ٣٠ \text{ جتا } ٤٥ = \text{جا } ٦٠$$

$$\therefore \text{س} \times \left(\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore \text{س} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{س} = ٢\sqrt{3}$$

مثال ٦

أوجد قيمة س التي تحقق ٢ جا س = ظا ٦٠ - ظا ٤٥ حيث س زاوية حادة

الحل

$$\therefore ٢ \text{ جا س} = \text{ظا } ٦٠ - \text{ظا } ٤٥$$

$$\therefore ٢ \text{ جا س} = ١ \times ٢ - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = ٢ - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

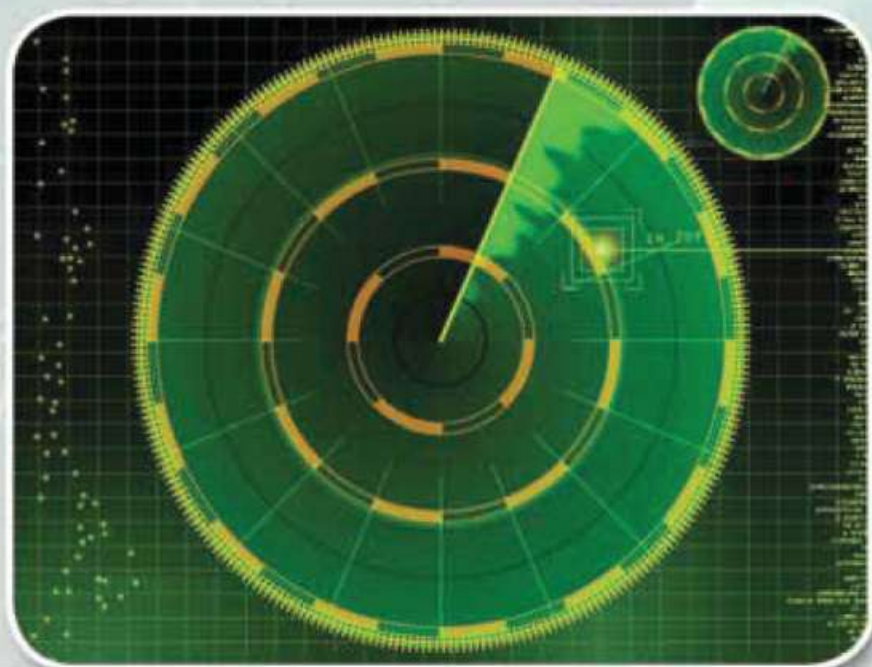
$$\therefore \text{جا س} = \frac{٢ - \frac{\sqrt{3}}{2}}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = ٣٠^\circ$$

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة:

الهندسة
التحليلية



يستخدم الرادار في التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة
الأجسام المتحركة كالطائرات والسفن.
وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار
يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن - ...)

البعد بين نقطتين

فكر وناقش

سبق أن قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثي .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

١ أ (٠، ٣)، ب (٠، ١-)

٢ جـ (٣، ٠)، د (١-، ٠)

٣ م (٢، ٣)، ن (٥، ٧)

نلاحظ مما سبق أن :

١ النقطتين أ (٠، ٣)، ب (٠، ١-) تقعان على

محور السينات، وبالتالي فإن :

$$أب = |٣ - ١| = ٢$$

فيكون $أب = ٢$ وحدة طول.

٢ النقطتين جـ (٣، ٠)، د (١-، ٠) تقعان

على محور الصادات، وبالتالي فإن :

$$جـد = |٣ - ١| = ٢$$

$$٢ = |٣ - ١| = ٢$$

فيكون $جـد = ٢$ وحدة طول.

٣ النقطتين م (٢، ٣)، ن (٥، ٧) يمكن

تمثيلهما بيانياً كما في الشكل المقابل.

ولإيجاد طول $م ن$ نوجد :

$$م ك = |٣ - ٧| = ٤ \text{ وحدة طول،}$$

$$ن ك = |٢ - ٥| = ٣ \text{ وحدة طول.}$$

$\triangle م ك ن$ قائم الزاوية في ك

$$\therefore (م ن)^2 = (م ك)^2 + (ن ك)^2$$

(نظرية فيثاغورث)

$$(م ن)^2 = (٣)^2 + (٤)^2$$

$$(م ن)^2 = ٩ + ١٦$$

$$\therefore (م ن)^2 = ٢٥$$

$$\therefore (م ن)^2 = ٥ \text{ وحدة طول}$$

سوف تتعلم

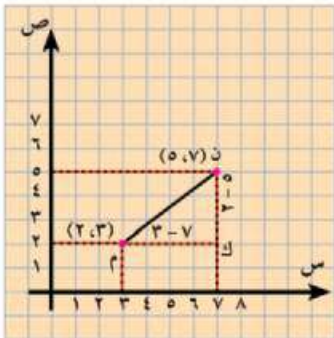
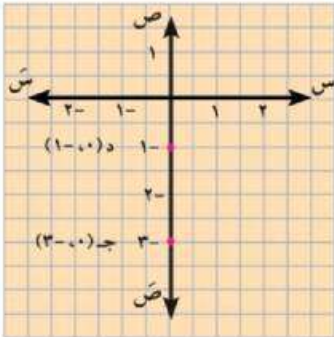
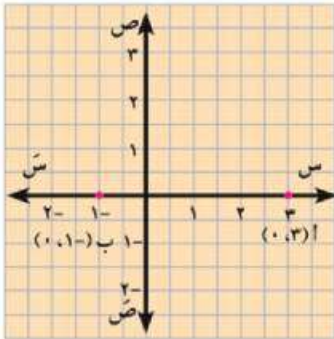
☆ كيفية إيجاد البعد بين
نقطتين باستخدام قانون
البعد.

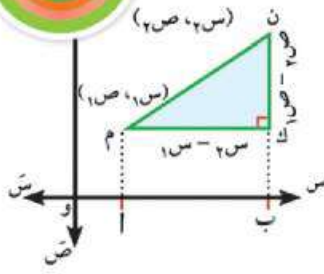
مصطلحات أساسية

☆ مستوى إحداثي.

☆ زوج مرتب.

☆ بعد بين نقطتين.





وبوجه عام :

إذا كانت : م (س_١، ص_١)، ن (س_٢، ص_٢) نقطتين فى المستوى الإحداثى

فإن : ك م = |اوب - و|

$$|س_٢ - س_١| =$$

$$ك ن = |ان ب - ك ب| = |ص_٢ - ص_١|$$

∴ ∆ ن ك م قائم الزاوية فى ك (نظرية فيثاغورث)

$$∴ (م ن)^2 = (ك م)^2 + (ك ن)^2$$

$$= (س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2$$

$$∴ م ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$$

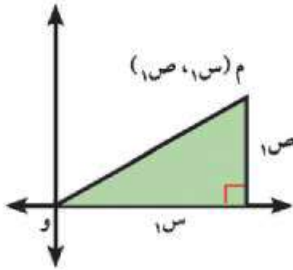
البعد بين النقطتين (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة :

فى الشكل المقابل بعد النقطة م (س_١، ص_١) عن نقطة الأصل و (٠، ٠)

$$وم = \sqrt{س_١^2 + ص_١^2}$$



مثال ١

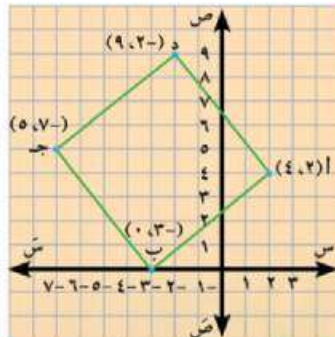
أ ب ج د شكل رباعى حيث أ (٤، ٢)، ب (٠، ٣)، ج (٥، ٧)، د (٩، ٢) اثبت أن الشكل أ ب ج د مربع.

الحل

$$أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2} = \sqrt{(٠ - ٤)^2 + (٣ - ٢)^2} = \sqrt{١٦ + ١} = \sqrt{١٧}$$

$$ب ج = \sqrt{(س_٣ - س_٢)^2 + (ص_٣ - ص_٢)^2} = \sqrt{(٥ - ٠)^2 + (٧ - ٣)^2} = \sqrt{٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤١}$$

$$ج د = \sqrt{(س_٤ - س_٣)^2 + (ص_٤ - ص_٣)^2} = \sqrt{(٩ - ٥)^2 + (٢ - ٧)^2} = \sqrt{١٦ + ٢٥} = \sqrt{٤١}$$



$$\sqrt{xi} \sqrt{v} = \sqrt{(0-) + (xi)} \sqrt{v} = \sqrt{(9-x) + ((2)-2)} \sqrt{v} = 15$$

$$\sqrt{41} = \sqrt{1 \times 41} = \sqrt{1 \times 4 \times 10.25} = \sqrt{4 \times 10.25} = 2 \times \sqrt{10.25} = 2 \times 3.2 = 6.4$$

∴ أبجد إما أن يكون مربعاً أو معيناً

لإثبات أن الشكل أب ج د مربع نوجد طولى القطرين أ ج ، ب د

$$\sqrt{12} \sqrt{3} = \sqrt{[4 \cdot 3] + [3 \cdot 3]} \sqrt{3} = 3 \sqrt{3}$$

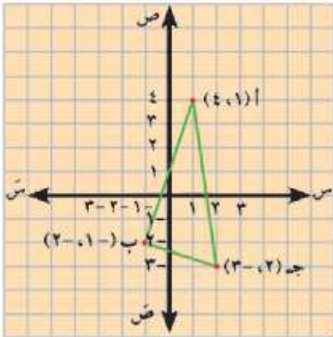
$$\sqrt{12} \sqrt{v} = \sqrt{(4) + (1-)} \sqrt{v} = \sqrt{[-4] + [(3-)(2-)]} \sqrt{v} = \sqrt{2} \sqrt{v}$$

∴ أج = ب د = $\sqrt{82}$ وأضلاع الشكل أب ج د متساوية في الطول

∴ الشكل أب ج د مربع

مثال ۲

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (٤، ١)، ب (-١، ٢)، ج (٢، -٣) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه



الحل

$$E_0 = 36 + E = {}^2(\underline{E} - \underline{2-}) + {}^2(1 - 1-) = {}^2(\text{أب})$$

$$10 = 1 + 9 = {}^2[(2-) - 3-] + {}^2[(1-) - 2] = {}^2(\text{ب ج})$$

$$0.0 = 49 + 1 = 2(4 - 3) + 2(1 - 2) = 2(\text{ج})$$

$$50 = {}^2(A_j), 50 = 10 + 40 = {}^2(B_j) + {}^2(A_j)$$

$${}^2(\text{ب ج}) + {}^2(\text{ا ب}) = {}^2(\text{ا ج}) \because$$

∴ $\angle (b) = 90^\circ$ (عکس نظریۃ فیثاغورث)

$$\therefore \text{م } (\Delta \text{ أ ب ج}) = \frac{1}{4} \times \text{أ ب} \times \text{ب ج} = \frac{1}{4} \times 4.7 \times 1.7 = 1.7 \times 1.7 \times \frac{1}{4} = 1.0 \text{ وحدة مربعة}$$

أثبت أن النقط أ (١، ٣)، ب (-٤، ٦)، ج (٢، ٢)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (-١، ٢)، ثم أوجد

محيط الدائرة .

الحل

$$0 = \overline{r_0}r = \overline{r(r)} + \overline{r(z-)}r = \overline{r[(1-) - r]} + \overline{r(r-1-)}r = r!$$

$$o = \sqrt{r}o_v = \sqrt{r(\varepsilon_-) + r(r)}\sqrt{v} = \sqrt{r[7-r] + r[(\varepsilon_-) - 1]}\sqrt{v} = \text{بم}$$

$$0 = \overline{r_0} v = \overline{r(x) + r(r-)} v = \overline{r[(r-)-2] + r(2-1-)} v = \text{جـم}$$

$\therefore \text{م} = \text{ب} = \text{ح} = \text{ه}$

∴ ا، ب، ج تقع على دائرة مركزها م

∴ محيط الدائرة = $\pi r = 5 \times \pi = 10\pi$ وحدة طول

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

فكر وناقش

في مستوى إحداثي متعامد: أوجد إحداثيي النقطة ج منتصف القطعة المستقيمة أ ب إذا كان:

أولاً: أ (٦، ٢)، ب (٦، ٦)

ثانياً: أ (٥، -٢)، ب (١، -٢)

ثالثاً: أ (٢، ١)، ب (٦، ٥)

سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد إحداثيي

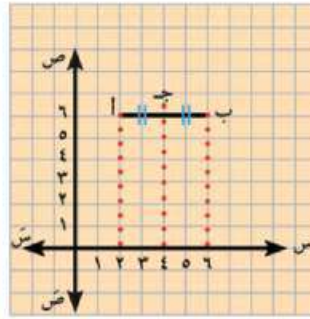
منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

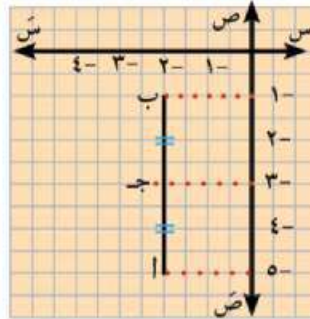
☆ طرفا قطعة مستقيمة.

☆ إحداثيا منتصف قطعة

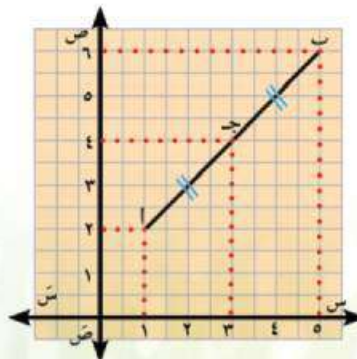
مستقيمة .



أولاً: القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٦، ٢)، ب (٦، ٦) توازي محور السينات ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي ج (٦، ٤).



ثانياً: القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٥، -٢)، ب (١، -٢) توازي محور الصادات، ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي ج (٣، -٢).



ثالثاً: في الشكل المقابل :

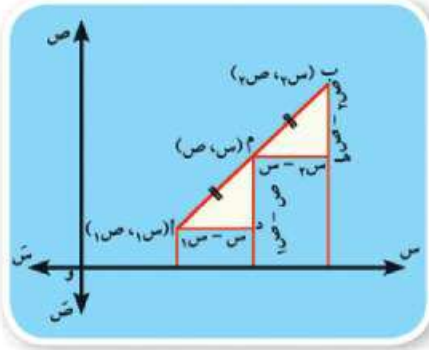
نفرض أن نقطة ج منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٢، ١)،

ب (٦، ٥)، ومن الرسم نجد أن

إحداثيي ج هو (٤، ٣).

أي أن ج $(\frac{٦+٢}{٢}, \frac{٥+١}{٢})$ أي ج (٤، ٣)

وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة كالاتي :



إذا كانت: $A(1, 1)$ ، $B(3, 3)$ ، $M(2, 2)$ حيث M منتصف AB .

ومن تطابق المثلثين $\triangle MDA$ ، $\triangle MBH$ نجد أن: $AD = MH$

$$\therefore 1 - 1 = 3 - 3$$

$$\therefore \frac{1+3}{2} = 2$$

وبالمثل: $DM = BH$ $\therefore 1 - 1 = 3 - 3$

$$\therefore \frac{1+3}{2} = 2$$

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$

مثال: إذا كانت J منتصف AB وكان $A(3, -5)$ ، $B(-7, 3)$

فإن إحداثي منتصف AB هي $\left(\frac{3-7}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$ أي $(-2, -1)$

مثال ١

إذا كانت $J(6, -4)$ هي منتصف AB حيث $A(5, 3)$ فأوجد إحداثي نقطة B .

الحل

نفرض أن $B(3, 5)$ ، $A(5, 3)$ ، منتصف AB هي النقطة $J(6, -4)$

$$\therefore \frac{3+5}{2} = 6, \frac{5+3}{2} = -4$$

$$\therefore \frac{3+5}{2} = 6 \quad \therefore 3+5 = 12 \quad \therefore 5 = 12-3 = 9$$

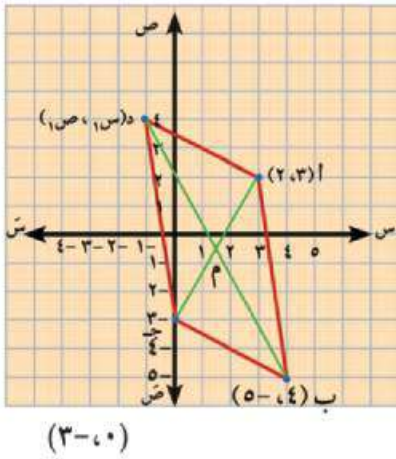
$$\therefore \frac{5+3}{2} = -4 \quad \therefore 5+3 = -8 \quad \therefore 3 = -8-5 = -13$$

$$\therefore B(9, -13)$$

مثال ٢

أب جد متوازي أضلاع فيه أ (٢، ٣)، ب (٥، ٤)، جـ (٣، ٠) - أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثي نقطة د.

الحل



الشكل أب جد متوازي أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه،

نفرض د (س، ص) $\overline{AM}$

$\therefore$ م منتصف أ جـ

$$\therefore \text{م} \left(\frac{3-2}{2}, \frac{0+3}{2} \right)$$

$$\therefore \text{م} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\therefore \text{م} \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+4}{2} \right)$$

$$\therefore 1+4=3$$

$$\therefore 1=س$$

$$\therefore -1+0=ص$$

$$\therefore 4=ص$$

$$\therefore \text{إحداثي د} (-1, 4)$$

م منتصف ب د،

$$\therefore \frac{1+5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$-1+0 = \frac{1}{2}$$

ميل الخط المستقيم

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢) يساوي $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

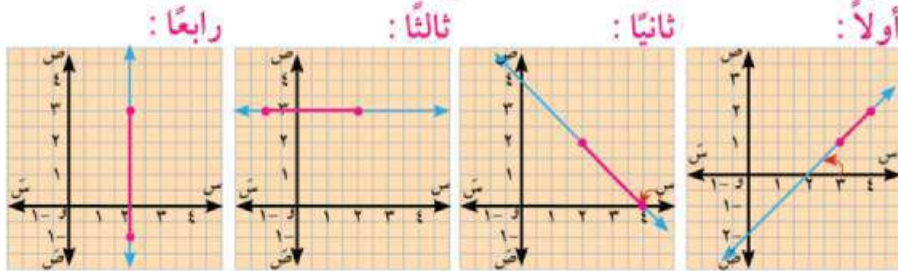
فكر وناقش

أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

أولاً : (١، ٣)، (٢، ٤) ثانياً : (٠، ٤)، (٢، ٢)
ثالثاً : (٣، ٢)، (٣، ١) رابعاً : (١، ٢)، (٣، ٢)

ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن رسم المستقيمات المارة بأزواج النقط السابقة في المستوى الإحداثي المتعامد كما في الأشكال الآتية :



سوف نتعلم

- ☆ العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين.
- ☆ العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين.

مصطلحات أساسية

- ☆ قياس موجب للزاوية.
- ☆ قياس سالب للزاوية.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ مستقيمان متوازيان.
- ☆ مستقيمان متعامدان.

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية :

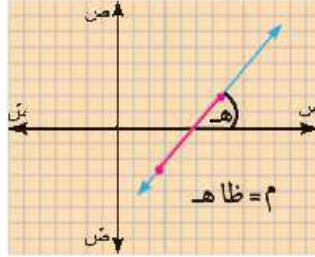


تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت مأخوذة في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة. فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

رقم الشكل	الميل $\left(\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \right)$ س _٢ < س _١	نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	ميل الخط المستقيم
أولاً	$م = \frac{١ - ٢}{٣ - ٤} = ١$	حادّة	أكبر من الصفر
ثانياً	$م = \frac{٠ - ٢}{٤ - ٢} = -١$	منفرجة	أقل من الصفر
ثالثاً	$م = \frac{٣ - ٣}{١ + ٢} = ٠$	صفريّة	يساوي صفراً
رابعاً	$م = \frac{١ + ٣}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	قائمة	غير معرف

ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؛
أي أن: ميل الخط المستقيم = ظاه
 حيث هـ الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $٤٨^\circ ١٢' ٥٦''$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = $١,٤٨٦٥$.

الحل

١ $\therefore \text{م} = \text{ظاه} \therefore \text{م} = \text{ظاه} ٤٨^\circ ١٢' ٥٦'' = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥$

أبدأ $\rightarrow \tan 56 \quad 12 \quad 48 \quad =$

٢ $\therefore \text{م} = \text{ظاه} \therefore \text{ظاه} = ١,٤٨٦٥ \therefore \angle \text{هـ} = ٥٦^\circ ١٢' ٤٨''$

أبدأ $\rightarrow \tan 1.4865 \quad =$

تدرب

١ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

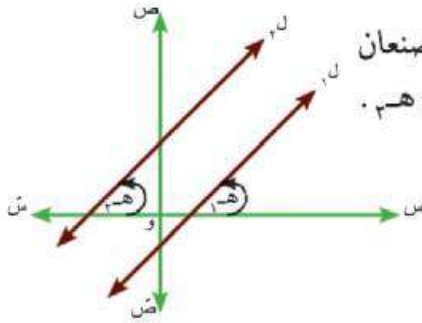
أ ٣٠° ب ٤٥° ج ٦٠°

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في الحالات الآتية :

أ $\text{م} = ٠,٣٦٧٣$ ب $\text{م} = ١,٠٢٤٦$ ج $\text{م} = ٣,١٦٤٨$

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

فكر و ناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين l_1 ، l_2 ميلاهما m ، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما h_1 ، h_2 . أكمل ما يأتي :

١ $h_1 = h_2$ (.....) لأنها

٢ ظاهراً ظاهراً

٣ $m \perp l_1$ $m \perp l_2$

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان $l_1 \parallel l_2$ فإن $m \perp l_1 = m \perp l_2$

أي أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان $m \perp l_1 = m \perp l_2$ فإن $l_1 \parallel l_2$

أي أن: إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

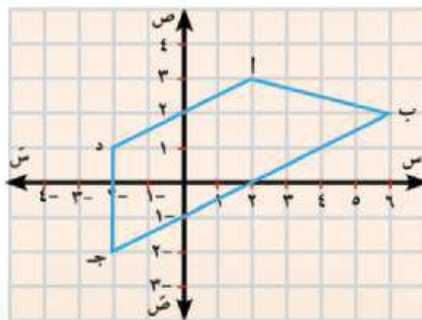
أمثلة

١ أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-3, 2)$ ، $(4, 5)$ يوازي المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° .

الحل

ميل المستقيم الأول $(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{4 - (-3)} = \frac{3}{7}$

ميل المستقيم الثاني $(m_2) = \tan 45^\circ = 1$ ∴ $m_1 \neq m_2$ ∴ المستقيمان متوازيان .



٢ مثل بيانياً النقط $A(2, 3)$ ، $B(6, 2)$ ، $C(-2, 2)$ ، $D(-2, 1)$ ، على المستوى الإحداثي، ثم أثبت أن الشكل $ABCD$ شبه منحرف .

الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ولإثبات ذلك تحليلياً نوجد ميل كل من $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$.

ميل $\overline{AD}$ (وليكن m_1)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = m_1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = m_1$$

وميل $\overline{BC}$ (وليكن m_2)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = m_1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = m_1$$

الشكل $\triangle ABC$ جد شبه منحرف ما لم تكن النقط A, B, C, D على استقامة واحدة (١)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = m_1$$

المستقيمان غير متوازيين (٢)

من (١)، (٢) الشكل $\triangle ABC$ جد شبه منحرف .

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

فكر وناقش

الشكل المقابل : يمثل المستقيمين l_1, l_2 الذي ميلهما m_1, m_2 حيث $l_1 \perp l_2$.

أوجد العلاقة بين m_1 و m_2 (هـ) ، و m_1 و m_2 (ي)

ثم أكمل الجدول الآتي باستخدام حاسبة الجيب:

قيم هـ	20°	40°			
قيم ي			140°	150°	
ظاهر $\times$ ظاي					

من الجدول السابق نجد أن :

ظاهر $\times$ ظاي $= 1$ أي أن : $m_1 \times m_2 = -1$

l_1, l_2 مستقيمان ميلهما m_1, m_2 حيث $m_1 \times m_2 = -1$ $\Rightarrow$ ح*

إذا كان $l_1 \perp l_2$ **فإن** $m_1 \times m_2 = -1$

أي أن: حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين $= -1$

وعكس ذلك صحيح: **فإذا كان** $m_1 \times m_2 = -1$ **فإن** $l_1 \perp l_2$

أي أن إذا كان حاصل ضرب ميلي مستقيمين $= -1$ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.

أمثلة

١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(372, 5)$ ، $(373, 4)$ عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 30° .

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول m_1 وميل المستقيم الثانى m_2 .

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 5}{373 - 372} = -1 \quad \therefore m_1 = -1$$

$$\therefore m = \text{ظاه} \quad \therefore m_2 = \text{ظا } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \neq -1 \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان.}$$

٢ إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص $(2, 4)$ ، س $(5, 3)$ ، ع $(1, 0)$ قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ.

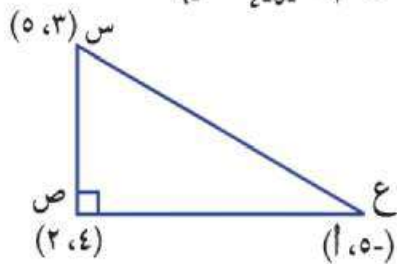
الحل

$$\text{نوجد ميل س ص فيكون } m_{SV} = \frac{3 - 4}{5 - 2} = -\frac{1}{3} \quad \text{نوجد ميل ص ع فيكون } m_{SE} = \frac{0 - 4}{1 - 2} = 4$$

$$\therefore \Delta \text{ س ص ع قائم الزاوية فى ص} \quad \therefore m_{SV} \times m_{SE} = -1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \times 4 = -1 \quad \therefore -\frac{4}{3} = -1 \quad \therefore 4 = 3$$

$$\therefore 4 - 3 = 1 \quad \therefore 3 - 2 = 1 \quad \therefore 3 - 2 = 1$$



معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهي :
 $أس + ب ص + ج = ٠$ حيث $أ، ب$ (كلاهما معاً) $\neq ٠$
 وتمثيلها بيانياً بخط مستقيم .

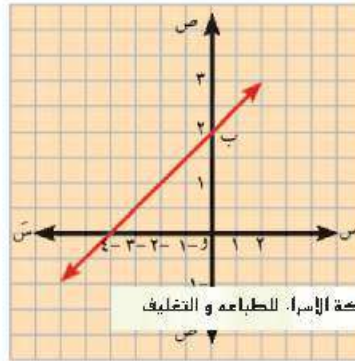
سوف نتعلم

- ☆ كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

- ☆ معادلة خط مستقيم.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ جزء مقطوع من محور الصادات.

مثال



مثل العلاقة : س - ٢ص + ٤ = ٠ بيانياً .
 ومن الشكل البياني احسب :

- ميل الخط المستقيم .
 - طول الجزء الرأسى المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .
- لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتي :

$$\text{بوضع ص} = ٠ \quad \text{س} = ٤$$

$$\text{س} = -٤ \quad \text{ب} = ٠ \quad \text{يحقق العلاقة}$$

$$\text{بوضع س} = ٠ \quad \text{ص} = ٢$$

$$\text{ص} = ٢ \quad \text{س} = ٠ \quad \text{يحقق العلاقة}$$

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) < ٠ (لماذا؟)

$$\frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \text{م}$$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (ج) و طوله يساوى ٢ وحدة طول .

ويمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة : ص = م س + ج

$$\text{فيكون } ٢ص = س + ٤ \quad \text{وبقسمة الطرفين على } ٢ \quad \text{ص} = \frac{١}{٢} س + ٢$$

ونلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س

ويساوى $\frac{١}{٢}$ ، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات ج = ٢ وهي

نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق .

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (ج) على الصورة:

$$ص = م س + ج \quad \text{حيث } م، ج \in \mathbb{R}$$

لاحظ أن: يمكن وضع معادلة الخط المستقيم $أ س + ب ص = ج$ ، ب $\neq 0$.

على الصورة: $ص = م س + ج$ كالآتي:

$$أ س + ب ص = ج \quad \text{فيكون } ب ص = - أ س - ج$$

$$\therefore ص = - \frac{أ}{ب} س - \frac{ج}{ب}$$

وهي على الصورة: $ص = م س + ج$

$$\text{حيث } م = - \frac{أ}{ب} = - \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

، $ج$ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

أمثلة

١ أوجد ميل الخط المستقيم $أ س + ٤ ص = ٥$ - صفر بطريقتين

ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

الحل

• معادلة الخط المستقيم على الصورة $أ س + ب ص = ج$ ، ب $\neq 0$.

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = - \frac{أ}{ب} \quad \therefore \text{ميل المستقيم} = - \frac{٣}{٤}$$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة $ص = م س + ج$

$$\therefore ٤ ص = ٥ - ٣ س$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = - \frac{٣}{٤} \quad \therefore ٤ ص = ٥ - ٣ س$$

$$\therefore \text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات} = \frac{٥}{٤}$$

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ١) وعمودي على الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢)، ب (٤، ٥).

الحل

$$\therefore \text{ميل المستقيم المار بالنقطتين } أ، ب = \frac{٢ - ٤}{٣ - ٥} = \frac{٢}{٢} = ١ \quad \therefore \text{فيكون ميل المستقيم العمودي عليه} = -١$$

• معادلة المستقيم تكون على الصورة: $ص = م س + ج$

• المستقيم يمر بالنقطة (٢، ١) فهي تحقق معادلته.

$$\therefore ١ = -١ \times ٢ + ج \quad \therefore ١ = -٢ + ج$$

$$\therefore \text{معادلة المستقيم تكون على الصورة: } ص = -١ س + ٣$$

٣

إذا كانت أ (٤، ٣)، ب (١، -٥)، ج (٥، ٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ وينصف ب جـ .

الحل

$$\text{نقطة منتصف ب جـ} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{-5+3}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2} \right) = (3, -1)$$

$$\therefore \text{ميل الخط المستقيم المطلوب} = \frac{-1-3}{3-4} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\therefore \text{ص} = \text{م} \times \text{ج} + \text{ب} \quad \therefore \text{ص} = 4 \times 3 - 1 = 11$$

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة أ (٤، ٣) فهي تحقق معادلته

$$\therefore 3 = 4 \times 4 - 1 \quad \therefore 3 = 15 - 1 \quad \therefore 3 = 14 \quad \therefore 3 - 14 = 0$$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة : $\text{ص} = 4\text{م} - 1$ وبضرب طرفي المعادلة في ٧

$$\therefore 7\text{ص} = 28\text{م} - 7 \quad \text{أي المعادلة هي : } 7\text{ص} - 28\text{م} + 7 = 0$$

الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى: العلاقات والدوال

حاصل الضرب الديكارتي

تمارين (١-١)

أولاً: أكمل ما يأتي

١ إذا كان $(١, ٥) = (٣, ٥ + ١)$ فإن $(١ - ب, ٨) = (٣, ٥ + ١)$ فإن $ب = \dots$

٢ إذا كان $(٣٢, ٣٢) = (١ + ص, ٣٢)$ فإن $ص = \dots$

٣ إذا كانت $(١١, ١) = (٨, ٣ + ص)$ فإن $ص = \dots$

٤ إذا كانت $(٩, ٩) = (٩, ٩)$ فإن $ص = \dots$

٥ إذا كانت $ص \times ص = \{(٩, ٥), (٦, ٥), (٩, ٣), (٦, ٣), (٩, ٢), (٦, ٢)\}$ فإن

$ص = \dots$

$ص = \dots$

٦ إذا كانت $ص \times ص = \{(٣, ٤), (٥, ٣), (٤, ٣), (٣, ٣), (٥, ٢), (٤, ٢), (٣, ٢)\}$ فإن

$ص = \dots$

$ص = \dots$

ثانيًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان $\sim$ (س) = ٣، $\sim$ (س × ص) = ١٢ فإن $\sim$ (ص) تساوي

أ ٤ ب ٩ ج ١٥ د ٣٦

٢ إذا كان $(٥، ٣) \in \{٦، ٣\} \times \{٨، ٣\}$ فإن س =

أ ٨ ب ٦ ج ٥ د ٣

٣ إذا كانت النقطة (٥، ب - ٧) تقع على محور السينات فإن ب =

أ ٢ ب ٥ ج ٧ د ١٢

٤ إذا كانت النقطة (س - ٤، ٢ - س) حيث س $\in$ ص تقع في الربع الثالث فإن س تساوي:

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٦

ثالثًا:

١ إذا كانت $\sim = \{٣، ٢\}$ ، $\sim$ {٥، ٤، ٣} أوجد:

أ $\sim \times \sim$ ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.
ب $\sim$ (س × ص)
ج $\sim$ (ص)
د $\sim$ (س × ص) $\cap$ ص

٢ إذا كان $\sim \times \sim = \{(١، ١)، (٣، ١)، (٥، ١)\}$ أوجد:

أ س، ص ب $\sim \times \sim$ ج $\sim$

٣ إذا كان: $\sim = \{٤، ٣\}$ ، $\sim = \{٥، ٤\}$ ، $\sim = \{٥، ٦\}$ فأوجد:

أ $\sim \times (\sim \cap \sim)$ ب $(\sim - \sim) \times \sim$ ج $(\sim - \sim) \times (\sim - \sim)$ د $(\sim - \sim) \times (\sim - \sim)$

٤ على شبكة بيانية متعامدة لحاصل ضرب الديكارتية $\sim \times \sim$ عين النقط الآتية:

أ (٥، ٤)، ب (٣، ٦)، ج (٢، ٧)، د (١، ٦)، هـ (٤، ٥)، م (٠، ٦)، ك (٩، ٠)

ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط.

٥ إذا كانت $\sim = \{١، ٥، ٦\}$ ، $\sim = \{٢، ٤، ٥\}$ فأوجد:

أ $\sim \times \sim$ ب $\sim \times \sim$ ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.

ج $\sim$ (س × ص)

٦ إذا كانت $\sim = [٣، ٢ -]$ ، أوجد المنطقة التي تمثل $\sim \times \sim$.

بين أي من النقاط التالية تنتمي إلى حاصل ضرب الديكارتية $\sim \times \sim$

أ (١، ٢)، ب (٣، ١)، ج (١، ٤)، د (٢، ٠)

العلاقات

تمارين (٢-١)

١ إذا كانت $s = \{1, 2, 3\}$ ، $t = \{12, 21, 47, 52\}$ ، وكانت E علاقة من s إلى t حيث $a E b$ تعني:

(أ رقم من أرقام العدد b)، لكل $a \in s$ ، $b \in t$

أولاً: اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

ثانياً: بين أي مما يلي صواب مع ذكر السبب:

١ ع ٥٢ ٢ ع ٢١ ٣ ع ٤٧

٢ إذا كانت $s = \{1, 2, 4, 6, 10\}$ ، وكانت E علاقة على s حيث $a E b$ تعني (أ مضاعف b)،

لكل $a, b \in s$ ، اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٣ إذا كانت $s = \{2, 4, 5, 7\}$ ، $t = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث $a E b$

تعني ($a \geq b$)، لكل $a, b \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٤ إذا كانت $s = \{1, 2, 3\}$ ، $t = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث $a E b$ تعني:

«العدد a هو المعكوس الضربي للعدد b » لكل $a \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٥ إذا كانت $s = \{1, 3, 4, 5\}$ ، $t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث

$a E b$ تعني « $a + b = 7$ » لكل $a \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٦ إذا كانت $s = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ، $t = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث

$a E b$ تعني « $a = b$ » لكل $a \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

٧ إذا كانت $s = \{-2, -1, 1, 2\}$ ، $t = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 8\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث

$a E b$ تعني « $a = b$ » لكل $a \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

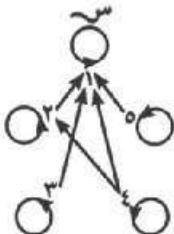
٨ إذا كانت $s = \{2, 3, 4\}$ ، $t = \{6, 8, 10, 11, 15\}$ وكانت E علاقة من s إلى t حيث

$a E b$ تعني «أ تقسم b » لكل $a \in s$ ، $b \in t$ اكتب بيان E .

٩ الشكل المقابل:

يمثل المخطط السهمي للعلاقة E المعرفة على المجموعة $s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

اكتب بيان E ومثلها بمخطط بياني.



الدالة (التطبيق)

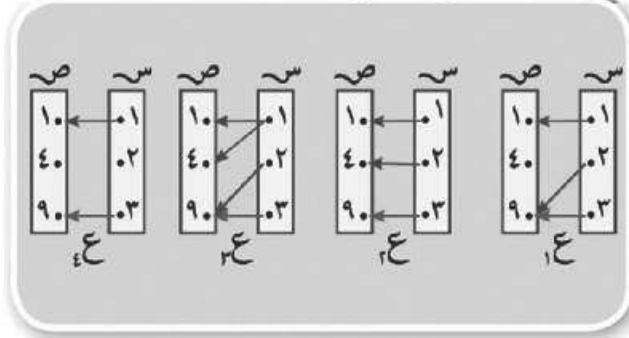
هل تعلم أن: د: س ← ص وتقرأ: «د دالة من س إلى ص».

أ، د (س) = ص وتقرأ: د دالة حيث د (س) = ص

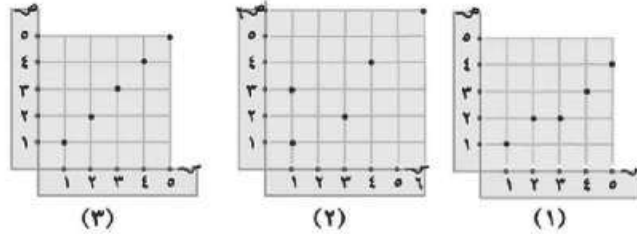
مدى الدالة د هو مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د:

تمارين (١ - ٣)

١ أي من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة، فأوجد مدى الدالة.



٢ أي من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة، فأوجد مدى الدالة.



٣ إذا كانت س = {٢، ٥، ٨}، ص = {١٠، ١٦، ٢٤، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ عامل من عوامل ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة؟ ولماذا؟

٤ إذا كانت س = {١، ٤، ٧}، ص = {١، ٣، ٥، ٦}، ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «أ + ب > ٨» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع، ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

٥ إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني: «أ مضاعف ب» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع، ومثلها لمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟

٦ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٦، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني: «٢ + ب = عدد فردي» لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. هل ع دالة؟ ولماذا؟

دوال كثيرات الحدود

تمارين (١ - ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي :

- ١ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة $v = 2s - 1$ يمثلها بيانياً خطٌ مستقيمٌ يقطع محور الصادات في النقطة
- ٢ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة $v = 3s + 6$ يمثلها بيانياً خطٌ مستقيمٌ يقطع محور السينات في النقطة
- ٣ إذا كانت النقطة (٣، أ) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة $d : c \leftarrow c$ حيث $d(s) = 4s - 5$ فإن أ تساوي

ثانياً: ١ إذا كان $d : c \leftarrow c$ ، اذكر درجة d ثم أوجد $d(-2)$ ، $d(0)$ ، $d(\frac{1}{4})$ حيث:

- ٢ مثل بيانياً الدوال الخطية الآتية، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات:
- | | | |
|------------------|--------------------------|--------------------|
| أ $d(s) = 3$ | ب $d(s) = 3 - 2s$ | ج $d(s) = s^2 - 4$ |
| أ $d(s) = 2s$ | ب $d(s) = -\frac{1}{4}s$ | ج $d(s) = 2s + 1$ |
| د $d(s) = 2 - s$ | هـ $d(s) = 3 - s$ | و $d(s) = -2s + 3$ |

٣ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

- | | |
|--|---|
| أ $d(s) = s^2 - 2$ متخذاً $s \in [-3, 3]$ | ب $d(s) = (s - 2)^2$ متخذاً $s \in [-1, 5]$ |
| ج $d(s) = s^2 + 2s + 1$ متخذاً $s \in [-4, 2]$ | د $d(s) = -2s^2 + 2$ متخذاً $s \in [-3, 3]$ |

الربط بالتكنولوجيا

استخدام برامج الحاسوب:

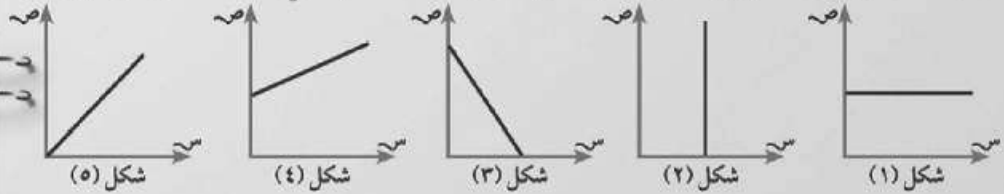
توجد العديد من البرامج المجانية لرسم المنحنيات وحل المعادلات، وهي متوفرة على الشبكة العنكبوتية ومنها البرنامج المجاني: الرياضيات للجميع (GeoGebra) وموقعه على الشبكة: <http://www.geogebra.org> والبرنامج يدعم باللغة العربية.

باستخدام البرنامج مثل بياناً كلاً من الدوال الآتية:

- ١ د (س) = $2س + 1$ ٢ د (س) = $5 - 3س$
 ٣ د (س) = $3س^2 - 2س + 2$ ٤ د (س) = $4س - 3س^2 - 2س^3$

نشاط

١ شركة لرصف الطرق تتقاضى ١٠٠٠٠٠ جنية (رسم ثابت) ثم ٣٠ جنيهاً لكل متر فإذا كان س (طول الطريق المرصوف بالأمتار)، ص (التكلفة الكلية التي تأخذها الشركة بالجنيهات).



أولاً: الشكل الذي يمثل العلاقة بين س، ص هو الشكل رقم
 ثانياً: أي من العلاقات الآتية تمثل المعلومات السابقة:

- أ ص = ٣٠ ب ص = ٣٠ + ١٠٠٠٠ ج ص = ١٠٠٠٠ + ٣٠ د ص = ٣٠٠٠٠٠

ثالثاً: اكتب مقالاً تناوّل فيه مدى جهود الدولة في تطوير ورصف الطرق حتى تكون سريعة وآمنة، وما ينبغي عليك من اتباع تعليمات المرور في السير والمحافظة على نظافة وسلامة هذه الطرق.

اختبار الوحدة

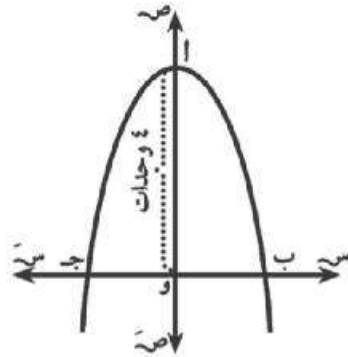
١ إذا كانت $s = \{0, 1, 4, 7\}$ ، $v = \{1, 3, 5, 6\}$ ، ع علاقة من s إلى v ، حيث $a \in b$ تعني: « $a > b$ » لكل $a \in s$ ، $b \in v$ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة؟ اذكر السبب.

٢ مثل بياناً كلاً من الدوال الآتية:

- أ د (س) = $3 - s$ ب د (س) = $2 - s$
 ج د (س) = $s^2 - 3$ متخذاً $s \in [-3, 3]$ د د (س) = $1 - 3s + s^2$ متخذاً $s \in [-1, 4]$

٣ أثناء قراءة كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:

- أ مثل العلاقة بين ن، ص بياناً ثم أوجد العلاقة الجبرية بينهما.
 ب ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب؟
 ج كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟



٤ الشكل المقابل: يمثل منحنى الدالة د حيث:

د (س) = $m - s^2$ ، إذا كان $a = 4$ وحدات
 أوجد:

- أ قيمة م.
 ب إحداثي ب، ج.
 ج مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، ج.

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردي والتغير العكسي

النسبة

تمارين (٢ - ١)

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣؛ أوجد العددين؟

٢ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣؛ أوجد العددين.

٣ أوجد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{49}{69}$ فإنها تصبح $\frac{2}{3}$

٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٥ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

التناسب

تمارين (٢ - ٢)

١ إذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة فأثبت أن:

$$\text{أ} \quad \frac{(س+ص)^2}{(ع+ل)^2} = \frac{س^2-ص^2}{ع^2-ل^2} \quad \text{ب} \quad \sqrt{\frac{س^2-ص^2}{ع^2-ل^2}} = \frac{س+ص}{ع+ل}$$

٢ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأثبت أن:

$$\text{أ} \quad \frac{١}{٣} = \frac{ع-ص}{س^٢-ص^٢} \quad \text{ب} \quad \sqrt{٢س^٣+٢ص^٣+٢ع} = ٢س+٢ص$$

٣ إذا كانت أ، ب، ج، د كميات متناسبة فأثبت أن:

$$\text{أ} \quad \frac{أ-ب}{(د-ب)} = \frac{أ-ج}{د} \quad \text{ب} \quad \sqrt{\frac{٢أ٣-٢ب٣}{٢د٣-٢ج٣}} = \frac{أ+ج}{د+ب}$$

٤ إذا كانت ب هي الوسط المتناسب بين أ، ج فأثبت أن:

$$\text{أ} \quad \frac{١}{ب} = \frac{١}{أ} + \frac{١}{ج} \quad \text{ب} \quad \frac{ج}{ب} = \frac{ج}{أ} = \frac{٢ج٢-٢ب٢}{٢ج٣-٢ب٣}$$

٥ إذا كانت أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل؛ فأثبت أن:

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \frac{أ-ب}{ب} &= \frac{ب-ج}{ج} = \frac{ج-د}{د} \\ \text{ب} \quad \frac{أ-٢ب+٢ج-٢د}{٢د+د+د} &= \frac{ج}{٢ج} \\ \text{ج} \quad \frac{٢ج}{٢د+د+د} &= \frac{١}{٢} \end{aligned}$$

٦ إذا كانت: أ، ب، ج، د، هـ، ٦، ٧، ٨ كميات موجبة في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \sqrt{\frac{١٥}{٨٨+ج٧}} = \sqrt{\frac{١٥}{٨٨}}$$

٧ إذا كانت: $\frac{ص}{س-ع} = \frac{س}{ص+ع} = \frac{ص+س}{ع}$ فأثبت أن كلاً من هذه النسب يساوي ٢ (ما لم تكن: س+ص=٠) ثم أوجد س:ص:ع

٨ إذا كان $\frac{١}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ج}{٤} = \frac{١٢-ب+ج}{س}$ فأوجد قيمة س.

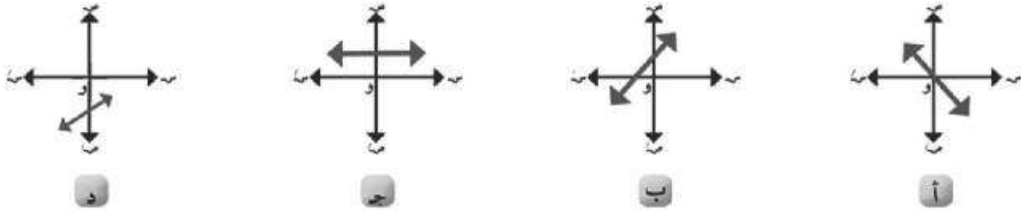
٩ إذا كان أ:ب:ج=٥:٧:٣ وكان أ+ب=٦، ٢٧ فأوجد قيمة كل من أ، ب، ج

التغير الطردي و التغير العكسي

تمارين (٢ - ٣)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١) أي من الأشكال البيانية الآتية تمثل تغيراً طردياً بين س، ص:



٢) العلاقة التي تمثل تغيراً طردياً بين المتغيرين ص، س هي:

أ) $س = ٥$ ب) $ص = س + ٣$ ج) $\frac{س}{٤} = \frac{ص}{٣}$ د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

٣) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت س = ٣٧ عندما $\frac{٢}{٣} = \frac{ص}{٧}$ فإن ثابت التناسب يساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) ٢ د) ٦

ثانياً: (الحساب العقلي): من بيانات الجدول التالي أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

أ) بين نوع التغير بين ص، س

ب) أوجد ثابت التناسب

ج) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

د) أوجد قيمة س عندما $\frac{٢}{٥} = \frac{ص}{٢}$

تمارين عامة على الوحدة

١ إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين س؛ فاختر الإجابة الصحيحة:

- أ ص = أ س ب ص = $\frac{1}{س}$
ج ص = أ + $\frac{1}{س}$ (م ثابت ≠ ٠) د ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

٢ إذا كانت ص ∞ س وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ فأوجد ص عندما س = ٨٠

٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا في ٦ ساعات؛ فكم كيلو مترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات؟

٤ إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر)، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر؛ فعاذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

٥ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ١٦

٦ إذا كانت أ، ب، ج، د، في تناسب متسلسل فأثبت أن:

أ $\frac{٢١ - ٣ج}{٢د - ٢ب} = \frac{٢١ - ٣ج}{٢د - ٢ب}$ ب $\frac{٢٣ + ٢١}{٢ب - ٢٣} = \frac{٢٣ + ٢١}{٢ب - ٢٣}$

٧ إذا كان $\frac{س}{١٢ + ب} = \frac{ص}{٣ - ج} = \frac{ع}{١ - ج٢}$ فأثبت أن $\frac{س + ٢ص + ٢ع}{١٣ + ٦ب} = \frac{س + ٢ص + ٢ع}{١٣ + ٦ب}$

٨ الربط بالهندسة: س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة في مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ فأوجد س : ص.

٩ تطبيقات حياتية: في مجال اهتمام الدولة بالريف المصري، رصدت الدولة مبلغ ١,٨٥ × ١٠^٦ جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٤}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب؛ فعاهاى تكاليف كل منها؟

١٠ تطبيقات حياتية: إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل؟

نشاط



١ (حساب عقلي) من بيانات الجدول الآتي: أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

أ. بين مع ذكر السبب أن التغير بين س، ص تغير عكسي.

ب. اكتب ثابت التغير. ج. اكتب العلاقة بين س، ص.

د. أوجد قيمة ص عندما س = ٤٨ هـ. أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

٢ إذا كانت نسبة النجاح في إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هي ٨٣٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩٪، ونسبة النجاح للبنات ٨٩٪ فأوجد
أولاً: نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات في هذه المحافظة.
ثانياً: النسبة بين عدد البنين و عدد البنات في هذه المحافظة

اختبار الوحدة

١ إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+ج}{٦} = \frac{ج+د}{٥}$ فأثبت أن: $\frac{أ+ب+ج+د}{١} = ٧$

٢ إذا كان ص = ٩ - أ وكان ص ∞ $\frac{١}{٣}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص، س ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

٣ إذا كان $\frac{٢١س-ص}{ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∞ ع.

٤ إذا كان س^٤ ص^٢ - ١٤ س^٢ ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن ص ∞ $\frac{١}{٣}$

٥ الربط بالفلك: إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طردياً مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان ١٨٢ كجم، ر = ٣٥ كجم فأوجد ر عندما و = ٣١٢ كجم.

٦ الربط بالفيزياء: إذا كان مقدار السرعة ع التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ث عندما ل = ٣ سم. أوجد ع عندما ل = ٢,٥ سم.

الوحدة الثالثة: الإحصاء

جمع البيانات

تمارين (٣ - ١)

١. قارن بين أسلوبَي الحصر الشامل والعينات مبيّنًا مزايا وعيوب كل منهما.

٢. ترغب إدارة أحد الفنادق في معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بها في مستوى الخدمة المقدمة لهم، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠، واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. حدد باستخدام ألك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين في هذه العينة.

٣. إذا كان هناك في إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها؛ فاحسب عدد مفردات كل طبقة في العينة.

التثبت



الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ، ب في الصف الثالث الإعدادي في أحد الاختبارات:

فصل أ	مجموعات الدرجات	عدد التلاميذ	٠٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
			٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

فصل ب	مجموعات الدرجات	عدد التلاميذ	٠٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
			٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

- مثل كلاً من التوزيعين بالمضلع التكراري على شكل واحد.
- أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من التوزيعين التكراريين.
- أي الفصلين أكثر تجانساً في مستوى التحصيل؟

تمارين (٣ - ٢)

- احسب الانحراف المعياري لكل من البيانات التالية:
 - ٢٧، ٢٠، ٥، ٣٢، ١٦
 - ٥٩، ٧٠، ٦١، ٥٣، ٧٢
 - ١٨، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ٢٢
 - ٦-، ٢٧، ٩-، ١٢-، ١٥-
- إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات = صفراً، فعماذا تستنتج؟
- التوزيع التكراري التالي يبين عدد أطفال بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة:



عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

- احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الأطفال.
- التوزيع التكراري التالي يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ في إحدى المدارس:

الوزن بالكيلو جرام	٣٥	٤٥	٥٥	٦٥	٧٥-٨٥	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

- أوجد:
 - الوسط الحسابي لأوزان التلاميذ.
 - الانحراف المعياري لأوزان التلاميذ.

تمارين عامة على الوحدة

١ اذكر الأسلوب المناسب لجمع البيانات في كل من:

أ معرفة نوعية القمح قبل شرائه.

ب معرفة درجة ملوحة مياه البحر.

ج معرفة صلاحية أسطوانات الغاز قبل توزيعها.

٢ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالي:

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى في العينة ٢٤٠ مفردة؛ أوجد حجم العينة كلها.

٣ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات التالية:

١٠، ٣٧، ٩، ٨، ١٦، ١٥، ١٣، ١٧، ١٢، ٢٣

٤ فيما يلي توزيع تكراري يبين أعمار ١٠ أطفال:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات.

٥ التوزيع التكراري التالي يبين كمية البنزين التي تستهلكها مجموعة من السيارات:

عدد الكيلو مترات لكل لتر	-٥	-٧	-٩	-١١	-١٣	١٥-١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

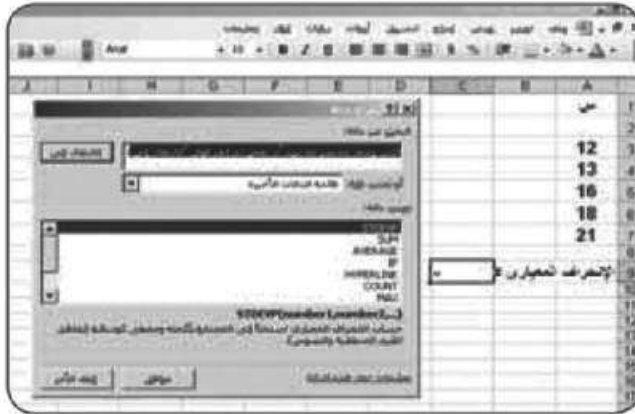
أوجد الانحراف المعياري لعدد الكيلو مترات لكل لتر.

الربط بالتكنولوجيا



استخدام برامج الحاسب الآلي لحساب الانحراف المعياري.

أولاً: ابدأ (Start) ثم برامج (programs) ثم الجداول الإلكترونية (Excel) فتظهر الشاشة التالية:



من مربع حوار البحث عن دالة ،
اختر الدالة STDEVP ثم إدخال



أدخل بيانات مثال (1) في المدى
(A3 , A7) كما بالشكل

من قائمة إدراج (insert)، اختر
دالة (F_x) ثم إدخال



لاحظ أن الانحراف المعياري
لمجتمع البيانات = 3, 286335
وهو نفس الناتج السابق حسابه في
مثال (1) باستخدام الحاسبة.



لحساب الانحراف المعياري لمجتمع البيانات حدد
نطاق المتغير (A3 , A7) ثم إدخال



نشاط

١ باستخدام أسلوب العينات اختر عينة عشوائية من زملائك بالفصل حجمها ١٠ مفردات ثم قس أطوالهم بالسنتيمترات، واحسب متوسط طول زملائك بالفصل. قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج الأخرى التي حصل عليها زملاؤك. فسر إجابتك.

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

٢ الجدول المقابل يبين درجات الحرارة على بعض المدن.

أ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجة الحرارة العظمى.

ب احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجة الحرارة الصغرى.

(يمكنك تتبع النشرة الجوية اليومية وحساب الانحراف المعياري لها)

اختبار الوحدة

١ اشرح بإيجاز العينة العشوائية البسيطة مبيناً كيف يتم اختيارها.

٢ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من البيانات التالية:

أ ٧٠، ٧٦، ٧٠، ٦٤، ٧٠، ٦١، ٦٥ ب ٧٧، ٥٠، ٨٨، ٩١، ٤٦، ٨٥، ٣٩

أي المجموعتين أ، ب أكثر تجانساً؟

٣ للتوزيع التكراري التالي احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري:

المجموعة	صفر -	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

٤ قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله في فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من:

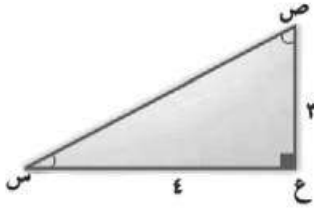
أ مشروبات ساخنة ب وجبات خفيفة ج مثلجات

حدد باستخدام ألتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين في هذه العينة.

الوحدة الرابعة :حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تمارين (٤ - ١)



١ في الشكل المقابل : أكمل

- = جاس ب جتاس =
..... = ظاس د جتاص =
..... = صا هـ جاص =

٢ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

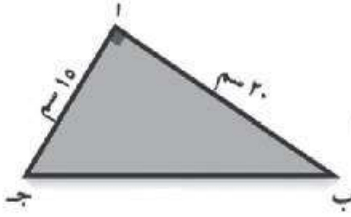
٣ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

٤ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل زاوية من زواياه.

٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جـ ا ، جـ تا ، جـ تا ح ، ظا ح .

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كان أ ب = ٢٧ جـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .



٧ في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث فيه $\angle 1 = 90^\circ$ ، أ ج = ١٥ سم، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن : جتا ح جتا ب - جا ح جا ب = صفر

٨ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٥ سم، س ع = ١٣ سم

أوجد قيمة : ١ ظا س + ظا ع ٢ جتا س جتا ع - جا س جا ع

٣ جا س جتا ع + جتا س جا ع

٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع، س ع = ٧ سم، س ص = ٢٥ سم،

أوجد قيمة كل من : ١ ظا س × ظا ص ٢ جا س + جا ص

١٠ أ ب ج د شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{أ ب} \parallel \overline{أ د}$ ، أ د = ٤ سم، أ ب = ٥ سم، ب ج = ١٢ سم

أثبت أن : $\frac{٥ \text{ ظا ب جتا ح}}{\text{جا}^2 \text{ ح} + \text{جتا}^2 \text{ ب}} = ٣$

١١ أ ب ج د مثلث فيه أ ب = أ ج = ١٠ سم، ب ج = ١٢ سم، رسم أ د $\perp$ ب ج، أ د $\cap$ ب ج = {د}

أولاً: أوجد قيمة : جا (أ د ج)، جتا (أ د ج)، ظا (أ د ج)

ثانياً: أثبت أن : ١ جا^٢ ج + جتا^٢ ج = ١ ٢ جا ب + جتا ج < ١

نشاط



قطعة أرض على شكل شبه منحرف AB CD فيها $CD \parallel AB$ ، $\angle B = 90^\circ$ ،

$AD = 18$ مترًا، $BC = 33$ متر

$CD = 25$ متر

المطلوب: 1 إيجاد طول AB .

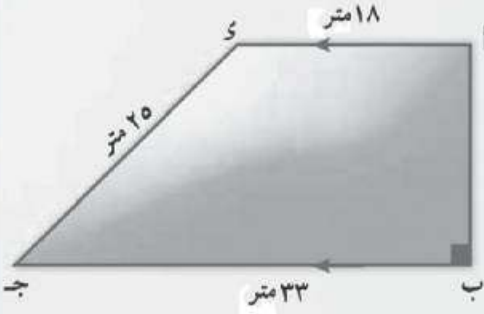
2 $\angle C$ (ج).

3 إذا أراد صاحب قطعة الأرض

عمل نافورة دائرية الشكل داخلها،

فما أكبر مساحة ممكنة لهذه النافورة؟ ثم أوجد مساحة الجزء المتبقى من قطعة الأرض.

($3, 14 = \pi$)



اختبار الوحدة

١ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية ، مبينا خطوات الحل :

$$1 \quad 2 \text{ جا } 30^\circ = 60^\circ \quad 2 \text{ ظا } 30^\circ = 60^\circ \quad 2 \text{ ظا } 30^\circ = 1 - 2 \text{ ظا } 30^\circ$$

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\sin$ (حيث $\sin$ زاوية حادة) التي تحقق كلاً من :

$$2 \text{ ظا } 30^\circ = 4 \text{ جتا } 60^\circ \quad 2 \text{ جتا } 30^\circ = 3 \text{ جتا } 60^\circ + 2 \text{ جتا } 30^\circ \text{ جتا } 60^\circ$$

٣ AB CD مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC = 12, 6$ سم، $\angle C = 124^\circ$ ، أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول BC .

٤ AB CD شبه منحرف فيه $CD \parallel AB$ ، $\angle B = 90^\circ$ ، فإذا كان $AB = 3$ سم، $AD = 6$ سم،

$BC = 10$ سم. أثبت أن: $\angle C = 120^\circ$ (ج) - $\angle A = 60^\circ$ (ج)

٥ سلم AB طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوي أعلى حائط رأسى وطرفه B على أرض أفقية، فإذا كانت BC هي مسقط نقطة A على سطح الأرض، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض 60° فأوجد طول AB .

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

تمارين (٥ - ١)

أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ البعد بين النقطة $(-٣، ٤)$ ونقطة الأصل يساوي
- ٢ البعد بين النقطتين $(٠، -٥)$ ، $(١٢، ٠)$ يساوي
- ٣ البعد بين النقطتين $(٠، ١٥)$ ، $(٠، ٦)$ يساوي
- ٤ طول نصف قطر الدائرة التي مركزها $(٧، ٤)$ وتمر بالنقطة $(٣، ١)$ يساوي
- ٥ إذا كان البعد بين النقطتين $(١، ٠)$ ، $(٠، ١)$ هو وحدة طول واحدة؛ فإن $A =$

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

- ١ النقط $(٠، ٠)$ ، $(٠، ٦)$ ، $(٨، ٠)$:
أ تكون مثلث منفرج الزاوية ب تكون مثلث حاد الزوايا
ج تكون مثلث قائم الزاوية د تقع على استقامة واحدة
- ٢ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة ، فأى من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟
أ $(٢، ١)$ ب $(-٢، ١)$ ج $(١، ٣٧)$ د $(١، ٣٧)$

٣ يبين أيًا من مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

- أ $(١، ٤)$ ، $(٣، -٢)$ ، $(٣، -١٦)$ ب $(٧، ٠)$ ، $(٣، -٣)$ ، $(٢٢، ٩)$
- ج $(١، -٤)$ ، $(١، ٠)$ ، $(٢، ٢)$ د $(١، -٤)$ ، $(١، ٠)$ ، $(٠، ٢)$

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣، ٢-) يساوى ٥

ب إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣، ١-) يساوى ١٣

٢ إذا كانت أ (س، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (١، ٥) وكانت أ ب = ب جـ؛ فأوجد قيمة س.

٣ إذا كان بعد النقطة (س، ٥) عن النقطة (٦، ١) يساوى ٥٧٢؛ فأوجد قيمة س .

٤ يبين نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى زواياه :

أ (٣، ١٠)، ب (٨، ٥)، جـ (٥، ٢) ب (١، ١-)، ب (٢، ١)، جـ (٣، ٢-)

جـ (٣، ٣)، ب (٤، ١-)، جـ (١، ١)

٥ يبين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٢، ٤)، ب (٣، ١-)، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه .

٦ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، ٥-)، ب (١، ٧)، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب، ثم أوجد مساحته .

٧ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٥، ٣)، ب (٦، ٢-)، جـ (١، ١-)، د (٠، ٤) اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين، ثم أوجد مساحته .

٨ أثبت أن النقط أ (٢، ٥)، ب (٣، ٣)، جـ (٤، ٢) ليست على استقامة واحدة، وإذا كانت د (٩، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع .

٩ فى الشكل المقابل :

أ أوجد إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد وموقف السيارات والمدرسة .

ب بعد منزل أحمد عن المدرسة .

جـ بعد منزل سعيد عن المدرسة .

د أيهما أقرب: منزل أحمد عن المدرسة أم منزل سعيد عن المدرسة ؟

هـ هل الطريقان أ ب، ب جـ متعامدان ؟ اذكر السبب .



١٠ إذا كانت أ، ب، جـ، د أربع نقط معلومة فى مستوى إحداثى متعامد ؛ فحدد الشروط التى تجعل هذه النقط رؤوساً لكل من الأشكال الهندسية الآتية :

٤ مربع

٣ معين

٢ مستطيل

١ متوازى أضلاع

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تمارين (٥ - ٢)

أولا: أكمل

- ١ إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث $A(5, -2)$ فإن إحداثي النقطة B هي
- ٢ إذا كانت A ، B ، C ، D أربع نقط على استقامة واحدة ، كان $A(1, 5)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(1, 3)$ ، $D(5, 1)$ أوجد :
 أولاً : إحداثي النقطة B هي (.....)
 ثانياً : إحداثي النقطة D هي (.....)
- ٣ $\overline{AD}$ متوسط في $\triangle ABC$ ، M منتصف $\overline{AD}$ حيث $A(8, 0)$ ، $B(3, 2)$ ، $C(-3, 6)$ أوجد :
 أولاً : إحداثي نقطة D هي (.....)
 ثانياً : إحداثي نقطة M هي (.....)
 تحقق بتعين إحداثيات النقط.

د لاثبت أن النقط $A(4, 3)$ ، $B(1, 1)$ ، $C(-5, 3)$ تقع على استقامة واحدة

أكمل :

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \dots\dots\dots$$

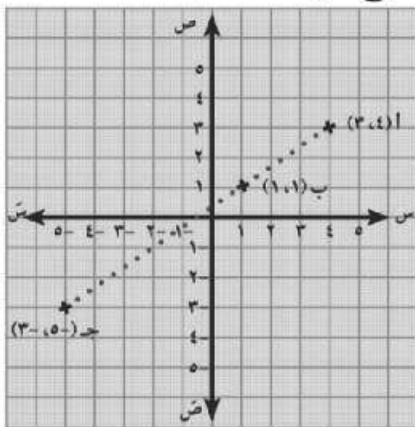
$$BC = \sqrt{(1-(-5))^2 + (1-3)^2} = \dots\dots\dots$$

$$AC = \sqrt{(3-(-5))^2 + (3-5)^2} = \dots\dots\dots$$

$$\therefore AB + BC = \dots\dots\dots = AC$$

$$\therefore AB = \dots\dots\dots + AC$$

$\therefore$ النقط A ، B ، C على استقامة واحدة



هـ أوجد إحداثي نقطة C حيث M منتصف $\overline{AB}$ في الحالات الآتية :

- ١ $A(2, 4)$ ، $B(6, 0)$ ، $C(.....)$ ٢ $A(7, 5)$ ، $B(3, 5)$ ، $C(.....)$
 ٣ $A(3, 6)$ ، $B(3, 6)$ ، $C(.....)$ ٤ $A(7, 6)$ ، $B(1, 0)$ ، $C(.....)$

ثانيًا : ١ إذا كانت جـ منتصف $\overline{AB}$ فأوجد س، ص في كل من الحالات الآتية :

- أ : أ (٥، ١) ، ب (٧، ٣) ، جـ (س، ص)
 ب : أ (٣-، ص) ، ب (١١، ٩) ، جـ (س، ٣-)
 جـ : أ (س، ٦-) ، ب (٩-، ١١) ، جـ (٣-، ص)
 د : أ (س، ٣) ، ب (٦، ص) ، جـ (٦، ٤)

٢ إذا كانت أ (١-، ٦-)، ب (٩، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{AB}$ إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول .

٣ أثبت أن النقط أ (٦، ٠)، ب (٢، ٤-)، جـ (٤-، ٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب، ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلًا .

٤ إذا كانت النقط أ (٣، ٢)، ب (٤، ٣-)، جـ (١-، ٢-)، د (٢-، ٣) هي رؤوس معين ؛ فأوجد :

أ إحداثي نقطة تقاطع القطرين .

ب مساحة المعين أ ب جـ د .

٥ أثبت أن النقط أ (٣-، ٠)، ب (٣، ٤-)، جـ (١-، ٦-) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{BC}$.

٦ إذا كانت أ (١-، ١-)، ب (٣، ٢)، جـ (٦، ٠)، د (٣، ٤-) أربع نقط في مستوى إحداثي متعامد . أثبت أن أ جـ، ب د ينصف كل منها الآخر، ثم عين نوع الشكل .

٧ أثبت أن النقط أ (٥، ٣)، ب (٣، ٢-)، جـ (٢-، ٤-) هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب، ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د معينًا وأوجد مساحة سطحه .

٨ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٣، ٤)، ب (٢، ١-)، جـ (٤-، ٣-)؛ أوجد إحداثي د .

خذ هـ $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH}$. ما إحداثي النقطة هـ ؟

ميل الخط المستقيم

تمارين (٥ - ٣)

أولاً: أكمل ما يأتي

- ١ إذا كان $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ وكان ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$ فإن ميل $\overrightarrow{CD}$ يساوي
- ٢ إذا كان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ وكان ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}$ فإن ميل $\overrightarrow{CD}$ يساوي
- ٣ ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(3, 2)$ ، $(3, -2)$ يساوي
- ٤ إذا كان المستقيم $\overrightarrow{AB}$ يوازي محور السينات حيث $A(8, 3)$ ، $B(2, 4)$ فإن $k =$
- ٥ إذا كان المستقيم $\overrightarrow{CD}$ يوازي محور الصادات حيث $C(4, -2)$ ، $D(5, -7)$ فإن m تساوي
- ٦ $\overrightarrow{AB}$ جـ مثلث قائم الزاوية في B فيه $A(1, 4)$ ، $B(-1, 2)$ فإن ميل $\overrightarrow{AB}$ يساوي
- ٧ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(0, 1)$ ، $(3, 0)$ والمستقيم الذي يصنع زاوية قياسها 30° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن $k =$

ثانياً:

- ١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $A(-3, 4)$ ، $B(-2, 3)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $C(1, 2)$ ، $D(3, 2)$.
- ٢ إذا كانت $A(-1, 1)$ ، $B(2, 3)$ ، $C(6, 0)$ أثبت أن المثلث $\overrightarrow{ABC}$ قائم الزاوية في B .
- ٣ إذا كان المستقيم L يمر بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, 1)$ والمستقيم L_1 يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° فأوجد قيمة k إذا كان المستقيمان L ، L_1 متعامدين.

أ متوازيين ب متعامدين

- ٤ إذا كانت النقط $(1, 0)$ ، $(3, 1)$ ، $(2, 5)$ تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة k .
- ٥ أثبت أن النقط $A(-1, 1)$ ، $B(0, 5)$ ، $C(4, 2)$ ، $D(5, 6)$ هي رؤوس لمتوازي أضلاع.
- ٦ أثبت باستخدام الميل أن النقط $A(-1, 3)$ ، $B(5, 1)$ ، $C(6, 4)$ ، $D(0, 6)$ هي رؤوس مستطيل.



٧ في الشكل المرسوم:

$\overrightarrow{AB}$ جـ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ ،

$A(9, 2)$ ، $B(3, 2)$ ، $C(3, -3)$ ، $D(4, -3)$ ،

$D(4, -3)$ ، أوجد إحداثي نقطة جـ.

- ٨ أثبت أن النقط $A(4, 3)$ ، $B(7, 0)$ ، $C(1, 2)$ هي رؤوس مثلث. وإذا كانت نقطة $D(1, 2)$

فأثبت أن الشكل $\overrightarrow{ABCD}$ جـ شبه منحرف وأوجد النسبة بين AD ، BC .

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات

تمارين (٥ - ٤)

١ إذا كان $ص = م س + ج$ تمثل معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات ؛ فأكمل ما يأتي :

أ معادلة الخط المستقيم عندما $م = ١$ ، $ج = ٣$ تكون على الصورة

ب معادلة الخط المستقيم عندما $م = -٢$ ، $ج = ١$ تكون على الصورة

ج معادلة الخط المستقيم عندما $م = ٣$ ، $ج = ٠$ تكون على الصورة

٢ أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات في كل مما يأتي :

أ $٢س - ٣ص - ٦ = ٠$ ب $٥س + ٤ص - ١٠ = ٠$ ج $٣س + ٢ص = ١$

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم في الحالات الآتية :

أ ميله يساوي ٢ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

ب ميله يساوي ميل الخط المستقيم $\frac{١-ص}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات مقداره ٣.

ج يمر بالنقطتين $(١، ٢)$ ، $(١، ١)$.

د معادلة الخط المستقيم عندما $م = صفر$ ، $ج = صفر$.

٤ ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية:

أ ميله يساوي $\frac{١-ص}{٣}$ ويقطع جزءاً من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوي وحدة واحدة.

ب ميله يساوي ٢ ويقطع جزءاً من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات.

ج يقطع من الجزئين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزئين طوليهما ٣، ٢ من الوحدات على الترتيب.

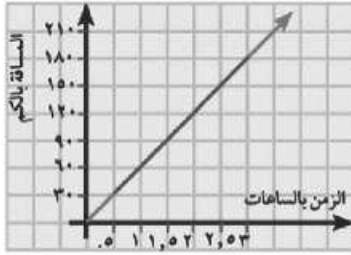
٥ الجدول الآتي يمثل علاقة خطية.

٣	٢	١	س
١	٣	١	ص = د (س)

أ أوجد معادلة الخط المستقيم.

ب أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

ج أوجد قيمة أ.



٦ الشكل المقابل: يمثل العلاقة بين المسافة (ف) التي تقطعها

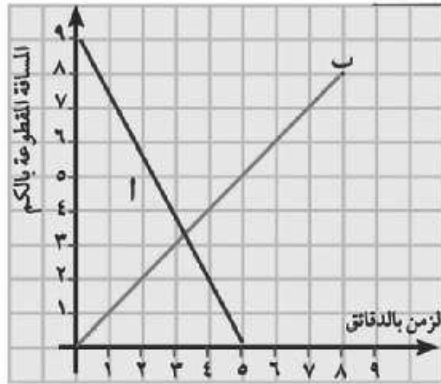
سيارة بالكيلومتر والزمن (بالساعة) الذي قطعت فيه هذه المسافة.
أوجد:

أ المسافة المقطوعة بعد ٩٠ دقيقة.

ب الزمن الذي قطعت فيه السيارة ١٥٠ كيلو مترًا.

ج سرعة السيارة.

د معادلة الخط المستقيم الذي يمثل العلاقة بين المسافة والزمن



٧ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف)

بالكيلومترات والزمن (ن) بالدقائق لكل من الجسمين أ، ب:

أ هل بدأ أ، ب الحركة في توقيت واحد؟

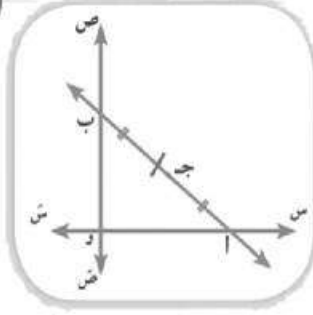
ب بعد كم دقيقة التقى أ، ب؟

ج ما سرعة أ؟

د اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمثل العلاقة

بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب.

نشاط



١ في الشكل المقابل:
النقطة ج منتصف أ ب حيث جـ (٣، ٤).

أولاً: أكمل ما يأتي:

أ و أ = وحدة الطول

ب و ب = وحدة الطول

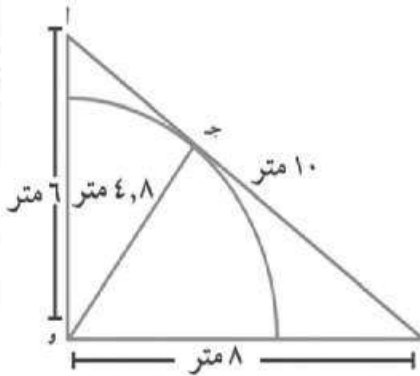
ثانياً: اختر من المجموعة الأولى ما يناسبها من المجموعة الثانية:

المجموعة الثانية	المجموعة الأولى
١-	أ ميل أ ب
$\frac{3}{4}$	ب ميل و جـ
صفر	ج ميل و أ
$\frac{3}{4}$	د ميل و ب
١	
غير معرف	

ثالثاً: أوجد إحداثيات النقط أ، ب، و، ثم أوجد معادلة أ ب، معادلة جـ و.

رابعاً: أوجد طول كل من جـ أ، جـ ب، جـ و

خامساً: أثبت بأكثر من طريقة أن جـ مركز الدائرة المارة بالنقط أ، و، ب.



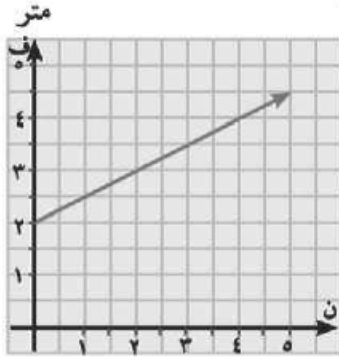
٢ ربطت بقرة عند نقطة و بحبل طوله ٤,٨ من المتر،

فإذا كانت المساحة و أ ب مزروعة بالبرسيم، فاحسب

مساحة الأرض المزروعة بالبرسيم التي لا تستطيع أن ب

تأكلها البقرة. لأقرب متر مربع.

اختبار الوحدة



١ الشكل المقابل :

يمثل حركة جسم يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث المسافة (ف) مقاسة بالتر والزمن (ن) بالثانية ؛ أوجد :

- المسافة عند بدء الحركة .
- سرعة الجسم .
- معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسم .
- المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة .
- الزمن الذي يقطع فيه الجسم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة .

٢ اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١ المستقيم الذي معادلته $s = 3 - 6t$ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله :
 أ - ٦ ب - ٣ ج - $\frac{2}{3}$ د - ٢

ب إذا كان المستقيمان $s = 4 - 3t$ و $s = 3 - 4t$ متعامدين فإن $k =$:
 أ - ٤ ب - ٣ ج - ٣ د - ٤

ج إذا كان المستقيمان $s + 5 = k$ و $2s + 5 = 0$ متوازيين فإن k تساوي :
 أ - ٢ ب - ١ ج - ١ د - ٢

د مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات $s = 4 - 12t$ و $s = 0$ و $s = 0$ يساوي :
 أ - ٦ ب - ٧ ج - ١٢ د - ٥

هـ $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين $(2, 5)$ و $(5, 2)$ ؛ أي من النقط التالية $\in \overleftrightarrow{AB}$:
 أ - $(1, 6)$ ب - $(2, 3)$ ج - $(0, 0)$ د - $(3, 4)$

و إذا كان $A(5, 3)$ و $B(2, -1)$ و $C(3, 5)$ فإن إحداثي نقطة ج التي تجعل $\triangle ABC$ قائمة الزاوية في ب هي :
 أ - $(6, -1)$ ب - $(-4, 5)$ ج - $(3, -2)$ د - $(8, -2)$

٣ أ - $(5, 6)$ ب - $(3, 7)$ ج - $(1, 3)$ ؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{AB}$.

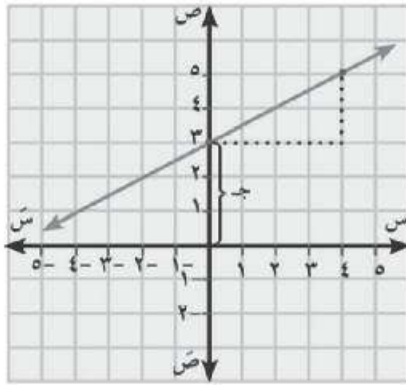
٤ أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على $\overline{AB}$ من نقطة منتصفها حيث $A(1, 3)$ و $B(3, 5)$.

٥ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(3, 5)$ و يوازي المستقيم $s + 2 = 7$.

- ٦ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٤)، (٢، -١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .
 ٧ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.
 ٨ أ ب ج مثلث فيه أ (٢، ١)، ب (٢، ٥)، ج (٤، ٣)، د منتصف أ ب، رسم د ه // ب ج و يقطع أ ج في ه؛ أوجد معادلة المستقيم د ه .

- ٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢)، (٠، ٠) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٤، ١)، (٧، ١).
 ١٠ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١، ٢)، (٣، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

- ١١ إذا كان المستقيم أ ب // محور الصادات، حيث أ (س، ٧)، ب (٥، ٣) فأوجد قيمة س .
 ١٢ إذا كان المستقيم ج د // محور السينات، حيث ج (٢، ٤)، د (٥، -٥) فأوجد قيمة ص .
 ١٣ أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (١، ٥) .



١٤ في الشكل المقابل أوجد :

- أ ميل الخط المستقيم (م) .
 ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات (ج) .
 ج معادلة الخط المستقيم بمعلومية م، ج .
 د طول الجزء المقطوع من محور السينات .
 ه مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محوري الإحداثيات .

نماذج إختبارات الجبر والهندسة النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة $(-٣، ٤)$ تقع في الربع

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٢) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى

(أ) المدى (ب) الوسط الحسابي (ج) الانحراف المعياري (د) المنوال

(٣) إذا كان $٣ = ٤$ ب فإن $أ : ب =$

(أ) $٤ : ٣$ (ب) $٣ : ٤$ (ج) $٧ : ٣$ (د) $٧ : ٤$

(٤) إذا كانت $٧ = (٧ - ٢)$ ، $٩ = (٩ - ٢)$ فإن $٧ = (٧ - ٢) \times (٧ - ٢) =$

(أ) ٦ (ب) ١٨ (ج) ١١ (د) ٧

(٥) المدى لمجموعة القيم ٧، ٣، ٦، ٩، ٥ يساوي

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٢

(٦) إذا كان ٧ س وكانت $٢ = ٣$ عندما $٨ = ٣$ فإن $٣ =$ عندما $٣ =$

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٦

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت $٧ \times ٢ = (٧، ٢)$ ، $(٥، ٢)$ ، $(٢، ٢)$ فأوجد:

(١) ٧ (٢) ٧×٢

(ب) إذا كانت $أ، ب، ج، د$ كميات متناسبة فأثبت أن $\frac{ج}{ب-أ} = \frac{د}{أ-ب}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت $٧ = (٧، ٢)$ ، $(٥، ٢)$ ، $(٢، ٢)$ فأوجد:

حيث $أ$ ب تعني أن $أ = ٢$ ب لكل $أ \in \mathbb{R}$ ، $٧ \in \mathbb{R}$ ، $٧ \in \mathbb{R}$

(١) اكتب بيان $ع$ ومثلها بمخطط سهمي (٢) بين أن $ع$ دالة

(ب) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة $٧ : ١١$ فإنها تصبح $٣ : ٢$

السؤال الرابع:

(أ) إذا كانت $s = \{1, 3, 5\}$ وكانت E دالة على s وكان بيان

$$E = \{(1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1)\}$$
 فأوجد

(١) مدى الدالة (٢) القيمة العددية للمقدار $A + B$

(ب) إذا كانت $s = \frac{1}{s}$ وكانت $s = 3$ عندما $s = 2$ فأوجد:

(١) العلاقة بين s ، s (٢) قيمة s عندما $s = 1, 5$

السؤال الخامس:

(أ) مثل بياننا منحنى الدالة $D(s) = (s - 3)^2$ متخذاً $s \in [0, 6]$

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة الصغرى للدالة ومعادلة محور التماثل

(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٨، ٩، ٧، ٦، ٥

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة (٣، ٤) تقع في الربع

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الربع

(٢) من مقاييس التشتت

(أ) الوسيط (ب) الوسط الحسابي (ج) الانحراف المعياري (د) المنوال

(٣) الثالث متناسب للعدد ٣، ٦ هو

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) ٩ (ج) ٢ (د) ١٢

(٤) إذا كانت $٧ = (س - ٢)$ ، $٧ = (ص - ٣)$ فإن $٦ = (ص - ٢) = \dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٦ (د) ١٢

(٥) المدى لمجموعة القيم ٧، ٣، ٦، ٩، ٥ يساوي

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٢

(٦) إذا كان $س = ٧$ فإن $ص = ٥٠ \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{1}{س}$ (ب) $س - ٧$ (ج) $س$ (د) $س + ٧$

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت $س = \{٢، ٥\}$ ، $ص = \{١، ٢\}$ ، $ع = \{٣\}$ فأوجد:

(١) $٧ = (س \times ع)$ (٢) $(ص \cap س) \times ع$
 (ب) إذا كانت $ب$ وسطا متناسبا بين $أ$ ، $ج$ فأثبت أن $\frac{ب}{ب - أ} = \frac{ب}{ب - ج}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت $س = \{١، ٣، ٤، ٥\}$ ، $ص = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

وكانت $ع$ علاقة معرفة من $س$ إلى $ص$ حيث $أ$ ع $ب$ تعني أن « $أ + ب = ٧$ »

لكل $أ \in س$ ، $ب \in ص$

(١) اكتب بيان $ع$ ومثلها بمخطط سهمي (٢) بين أن $ع$ دالة

(ب) إذا كانت $٥ = ٣ + ب$ أوجد قيمة $\frac{٧ + ٩ + ب}{٤ + ٢ + ب}$

السؤال الرابع:

(أ) إذا كانت د (س) = ٤ س + ب وكان د (٣) = ١٥ أوجد قيمة ب

(ب) إذا كانت ص ٥٠ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد:

(١) العلاقة بين س، ص (٢) قيمة ص عندما س = ٥

السؤال الخامس:

(أ) مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = ٤ - س^٢ متخذاً س ∈ [-٣، ٣]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى للدالة ومعادلة محور التماثل

(ب) الجدول الأتى يمثل عدد الأطفال فى ١٠٠ أسرة فى إحدى المدن:

عدد الأطفال (س)	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر (ص)	٦	١٥	٤٠	٢٥	١٤	١٠٠

أحسب المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

(لطلاب المدمجين)

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل ما يأتي:

(١) النقطة (٥، ٣) تقع في الربع

(٢) الدالة د (س) = س^٢ + ٨ تسمى دالة كثيرة حدود من الدرجة

(٣) المدى لمجموعة القيم ٤، ١٤، ٢٥، ٣٤ هو

(٤) إذا كان ص = ٢ س فإن ص = ∞

(٥) إذا كانت س = {٢، ٤، ٦} فإن س = (س) =

(٦) إذا كان (١، ٣) = (٦، ب) فإن أ + ب =

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

(١) إذا كان س ص = ٧ فإن ص = ∞

$$\left[\frac{1}{س}، س - ٧، س، س + ٧ \right]$$

$$\left[٩، ١٨، ١٢، ٣ \right]$$

(٢) إذا كان ٢، ٣، ٦، س كميات متناسبة فإن س =

(٣) إذا كان ١٢ = ٥ ب فإن $\frac{1}{ب} = \dots\dots\dots$

$$\left[\frac{٥}{٢}، \frac{٢}{٥}، \frac{٢}{٥}، \frac{٥}{٢} \right]$$

(٤) من مقاييس التشتت

[الوسط الحسابي، المدى، المنوال، الوسيط]

(٥) إذا كان س = (س) = ٥، س = (س × ص) = ١٠ فإن س = (ص) =

$$\left[١، ٢، ٣، ٤ \right]$$

(٦) إذا كان س = {١} فإن س = ٢ =

$$\left[\{١\}، \{(١، ١)\}، (١، ١)، ١ \right]$$

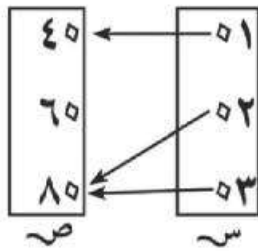
السؤال الثالث:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:

(١) إذا كان بيان الدالة د = {(٣، ٣)، (٤، ٢)، (٣، ١)}

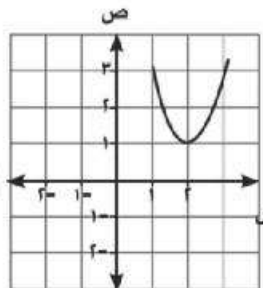
فإن مجال الدالة د = {٣، ٢، ١}

- (٢) إذا كان ص ∞ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فإن ص = ٢ عندما س = ٤ ()
- (٣) إذا كان مجد (س - س) = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوى ٩ فإن س = ٤ ()
- (٤) نقطة تقاطع المستقيم الذى يمثل الدالة
- د (س) = س + ٢ مع محور السينات هى النقطة (٠، ٢) ()
- (٥) إذا كانت د : س $\leftarrow$ ص فإن س تسمى المجال لهذه الدالة ()

- (٦) المخطط السهمى المقابل من س إلى ص تمثل دالة
- 
- ()

س : ٤ صل من العمود (أ) ما يناسبه من العمود (ب)

ب	أ
٦	(١) إذا كان (٤، ١) $\in \{٤، ١\} \times \{س، ٢\}$ فإن س = (٢) إذا كانت دالة س حيث د (س) = س - ٤ يمثلها
١	بيانها مستقيم يمر بالنقطة (٢، أ) فإن أ = (٣) $\frac{١٠}{١٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$
١٠	(٤) إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (٥) + د (٥) = = ١٠ (٥) الوسط المتناسب للعددين ٤، ٩ هو
$٦ \pm$	(٦) فى الشكل المقابل
٢	معادلة خط
٨	التماثل للمنحنى هو س =



أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) ظا $45^\circ = \dots\dots\dots$

- (أ) ١ (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\sqrt{2}$
- (ب) إذا كانت جاس $= \frac{1}{4}$ فإن $\cos$ (س) = حيث س قياس زاوية حادة
- (أ) 45° (ب) 60° (ج) 30° (د) 90°
- (ج) البعد بين النقطتين (٣، ٠)، (٠، ٤) يساوى
- (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧
- (ع) إذا كان س + ص = ٥، لك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن لك =
- (أ) $2 -$ (ب) $1 -$ (ج) ١ (د) ٢
- (هـ) إذا كان أ (٥، ٧)، ب (١، ١) فإن نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي
- (أ) (٣، ٢) (ب) (٣، ٣) (ج) (٢، ٣) (د) (٤، ٣)
- (و) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور الصادات هي
- (أ) س = ٣ (ب) ص = ٥ - (ج) ص = ٢ (د) س = ٥ -

السؤال الثانى:

- (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن: $2 = 60^\circ$ حا 30° حتا 30°
- (ب) أثبت أن النقط أ (٣، ١)، ب (٦، ٥)، ج (٣، ٣) تقع على استقامة واحدة.

السؤال الثالث:

- (أ) إذا كانت 4 حتا 60° حا $30^\circ =$ طاس فأوجد قيم س حيث س زاوية حادة
- (ب) إذا كانت جـ (٦، ٤) هي منتصف $\overline{AB}$ حيث أ (٥، ٣) فأوجد إحداثيى النقطة ب

السؤال الرابع:

- (أ) إذا كان المستقيم l يمر بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, k)$ ، والمستقيم l يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° فأوجد قيمة k إذا كان $l \parallel l_p$
- (ب) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج فيه أ ج = 6 سم، ب ج = 8 سم أوجد
- (1) حتا أ حتا ب - حا أ حا ب (2) وح (3) ب

السؤال الخامس:

- (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله 2 ويمر بالنقطة $(1, 0)$
- (ب) أثبت أن النقط أ $(3, -1)$ ، ب $(-4, 6)$ ، ج $(2, -2)$ الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها النقطة م $(-1, 2)$ ثم أوجد محيط الدائرة.

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ٢ حا ٣٠° ظا ٦٠°

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ٣ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢-، ٣-) ويوازي محور السينات هي

(أ) $2 - = س$ (ب) $3 - = س$ (ج) $2 - = ص$ (د) $3 - = ص$

(٣) إذا كان جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، س زاوية حادة فإن جا ٢ س =

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ج) ٢- (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٤) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٢ وحدة طول فإن النقطة تنتمي إليها

(أ) (٢-، ١) (ب) (٢-، $\sqrt{5}$) (ج) (١، $\sqrt{3}$) (د) (١، ٠)

(٥) البعد العمودي بين المستقيمين س - ٢ = ٠، س + ٣ = ٠ يساوي

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) ٣

(٦) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{6}{5}$ متوازيان فإن ك =

(أ) ٦ (ب) ٤- (ج) $\frac{3}{4}$ (د) ٢

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان جتا ه ظا ٣٠° = جتا ٥٤° فأوجد و (هـ) حيث ه زاوية حادة

(ب) بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقط أ (٣، ٣)، ب (٥، ١)، ج (٣، ١)

من حيث أطوال أضلاعه

السؤال الثالث:

(أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ١)، (١-، ٣-) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

(ب) إذا كانت النقطة (٣، ١) في منتصف البعد بين النقطتين (١، ص)، (٣، س) أوجد النقطة (س، ص).

السؤال الرابع:

- (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ١،
٤ وحدات طول على الترتيب ثم أوجد ميل هذا المستقيم.
- (ب) أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ج = ١٠ سم، ب ج = ٨ سم
أثبت أن $\text{جتا}^2 ١ + ٢ = \text{جتا}^2 ٢ + \text{جتا}^2 ٣$

السؤال الخامس:

- (أ) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(٣، ١-)$ ، $(٤، ٢)$ يوازي المستقيم ٣ ص - س - ١ = ٠
- (ب) أ ب ج د شبه منحرف فيه $\overline{أى} // \overline{ب ج}$ ، $\angle ب = ٩٠^\circ$ ، أ ب = ٣ سم، ب ج = ٦ سم،
أ د = ٢ سم، أوجد طول د ج ثم أوجد قيمة $\text{جتا} \angle ب ج د$

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

أجب عن الأسئلة الآتية:

الإجابة فى نفس الورقة

السؤال الأول: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارات الخطأ:

- () (١) البعد بين النقطتين (٠، ٤)، (٠، ٩) يساوى ٥
- () (٢) إذا كان طاه = ١ فإن قياس $\angle$ هـ = ٤٥°
- () (٣) المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س + ١ يقطع من محور الصادات جزء طوله ١ -
- () (٤) إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{JK}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{AB} \times$ ميل $\overleftrightarrow{JK} = ١$
- () [حيث كلام من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{JK}$ لا يوازي أى من المحورين]
- () (٥) ظا ٦٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- () (٦) إذا كانت أ (٢، ١)، ب (٣، ٤)، فإن إحداثى نقطة منتصف $\overline{AB}$ هى (٣، ٢)

السؤال الثانى:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- (١) بعد النقطة (٣، ٤) عن المحور السينى يساوى [٣، -٣، ٤، -٤]
- (٢) ٤ حتا ٣٠° ظا ٦٠° = [٣، $3\sqrt{2}$ ، ٦، ١٢]
- (٣) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥، لك س + ٢ ص = ٠ متوازيان فإن لك = [٤، ٠، ٠، ٣، ٠، ٤]
- [تكون مثلث منفرج الزاوية، تكون مثلث حاد الزاوية، تكون مثلث قائم الزاوية، تقع على استقامة واحدة]
- ٥- إذا كان $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{JK}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{JK} =$ [$\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$]
- (٦) إذا كان حاس = $\frac{1}{4}$ حيث س قياس زاوية حادة كان جا ٢ س = [١، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3\sqrt{2}}$]

السؤال الثالث

صل من العمود أ بما يناسبه من العمود ب :

أ	ب
(١) ميل المستقيم الموازي للمحور السيني =	١٠
(٢) $\text{ح} \alpha^{\circ} + \text{ج} \alpha^{\circ} = \text{.....}$	
(٣) إذا كان أ ب ج د مستطيل، أ (-١، -٤)	صفر
ج (٥، ٤) فإن طول ب د = وحدة طول	
(٤) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله ٢ هو	١
ص = س	٣-
(٥) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢، -٣)	٢
ويوازي محور السينات ص =	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(٦) قيمة المقدار $\frac{2 \text{ ظا } 30^{\circ}}{1 + 2 \text{ ظا } 30^{\circ}}$	

السؤال الرابع:

أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان أ ب // ج د وكان ميل أ ب = $\frac{1}{4}$ فإن ميل ج د = ...

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب ج د مثلث قائم

الزاوية فى ب، أ ب = ٣ سم، ب ج = ٤ سم

فإن ج د =

(٣) إذا كانت النقطة (٠، أ) تنتمى للمستقيم

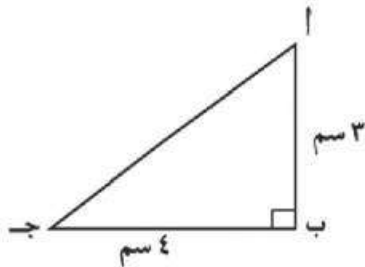
٣ س - ٤ ص = ١٢ فإن أ =

(٤) إذا كانت س جتا 60° = ظا 45° ، فإن س =

(٥) البعد بين النقطة (٤، ٣) ونقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد يساوى

(٦) إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة أ ب

حيث أ (٥، -٢) فإن إحداثى نقطة ب هى (.....،



المواصفات الفنية :

مقاس الكتاب :	$\frac{1}{8}$ (٨٢ × ٥٧) سم
طبع المتن :	٤ لون
طبع الغلاف :	٤ لون
ورق المتن :	٧٠ جم أبيض
ورق الغلاف :	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات :	١٢٤ صفحة
التجليد :	بشر
رقم الكتاب	١٠ / ٢ / ٣٤ / ٣٥ / ٢٤٦

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم داخل جمهورية مصر العربية



شركة الإسراء للطباعة والتغليف

<http://elearning.moe.gov.eg>



شركة الإسراء للطباعة والتغليف
